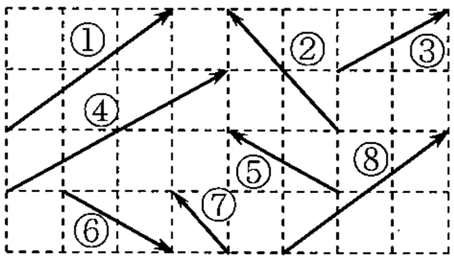
【等しいベクトル】

1 右の図に示されたベクトルについて，次のようなベクトルの番号の組をすべてあげよ。



(1) 向きが同じベクトル

①と⑧，②と⑦，③と④

(2) 互いに等しいベクトル

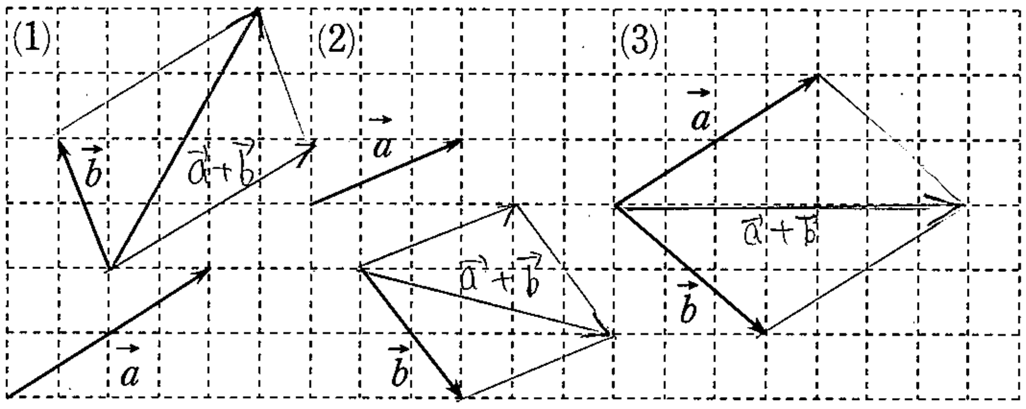
①と⑧

(3) 互いに逆ベクトル

⑤と⑥

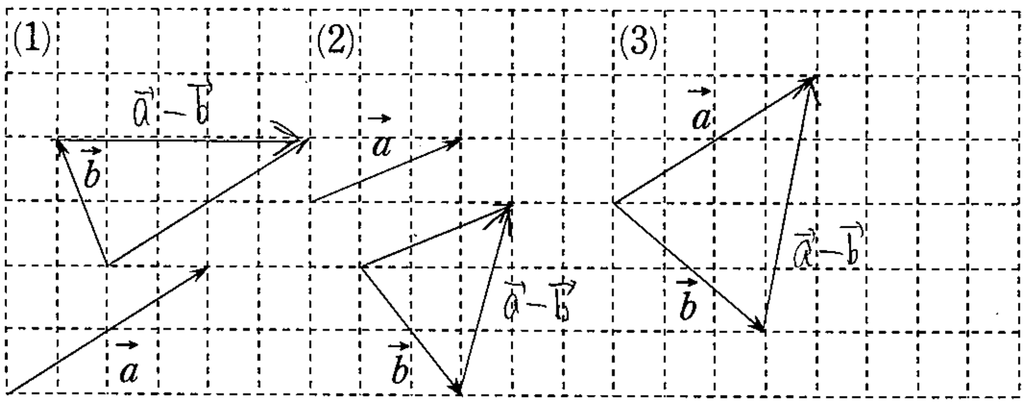
【ベクトルの加法】

2 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ をそれぞれ図示せよ。



【ベクトルの減法】

3 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$\vec{a}-\vec{b}$ をそれぞれ図示せよ。



【ベクトルの等式の証明】

4 次の等式が成り立つことを示せ。

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}$

(左辺) $=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}$
$=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$
$=\overrightarrow{CD}$
$=$ (右辺)

よって (左辺) = (右辺)

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

(左辺) $=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$
$=\overrightarrow{AA}$
$=\vec{0}$
$=$ (右辺)

よって (左辺) = (右辺)

【ベクトルの実数倍】

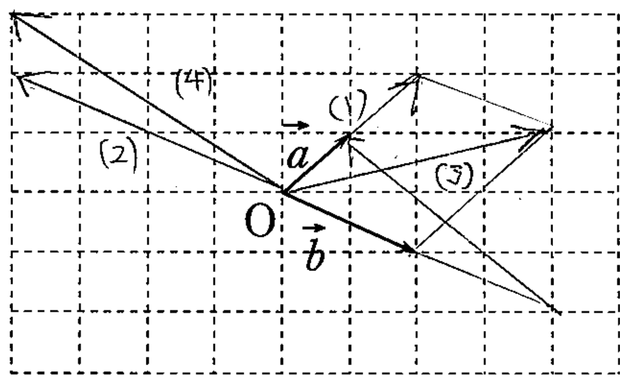
5 右の図のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，次のベクトルを O を始点にして図示せよ。

(1) $2\vec{a}$

(2) $-2\vec{b}$

(3) $2\vec{a}+\vec{b}$

(4) $\vec{a}-2\vec{b}$



【ベクトルの計算】

6 次の計算をせよ。

(1) $\vec{a}+3\vec{a}-2\vec{a}$

$=2\vec{a}$

(2) $3\vec{a}+7\vec{b}-5\vec{a}-2\vec{b}$

$=-2\vec{a}+5\vec{b}$

(3) $3(2\vec{a}+\vec{b})+4(\vec{a}-2\vec{b})$

$=6\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{a}-8\vec{b}$

$=10\vec{a}-5\vec{b}$

(4) $2(\vec{a}-3\vec{b})-3(3\vec{a}-2\vec{b})$

$=2\vec{a}-6\vec{b}-9\vec{a}+6\vec{b}$

$=-7\vec{a}$

(5) $\frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})+\frac{2}{3}(\vec{a}-\vec{b})$

$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$

$=\vec{0}$

(6) $\frac{1}{2}(-\vec{a}+2\vec{b})-\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})$

$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

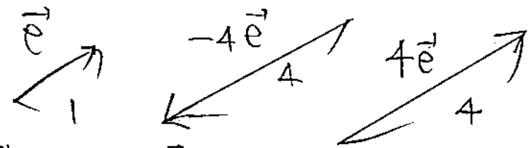
$=-\frac{3}{6}\vec{a}-\frac{4}{6}\vec{a}+\frac{3}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{b}$

$=-\frac{7}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

【ベクトルの平行と単位ベクトル】

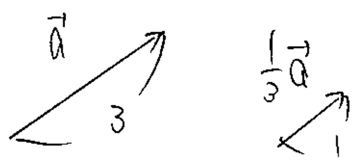
7 次の問いに答えよ。

(1) $\vec{e}$ を単位ベクトルとする。$\vec{e}$ と平行で大きさが 4 のベクトルを，$\vec{e}$ を用いて表せ。



$4\vec{e}$, $-4\vec{e}$

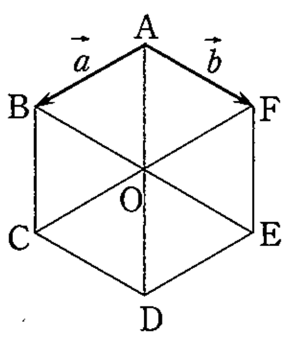
(2) $|\vec{a}|=3$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ。



$\frac{1}{3}\vec{a}$

【正六角形とベクトル】

8 正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。



(1) $\overrightarrow{AC}$ $=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$
$=\vec{a}+\vec{a}+\vec{b}$
$=2\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{EF}$ $=-(\vec{a}+\vec{b})$
$=-\vec{a}-\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{DB}$ $=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$
$=-\vec{b}-(\vec{a}+\vec{b})$
$=-\vec{a}-2\vec{b}$

【等式を満たすベクトルの決定】

9 等式 $\begin{cases} \vec{x}-\vec{y}=\vec{a}+\vec{b} & \text{―①} \\ 2\vec{x}+3\vec{y}=\vec{a}-\vec{b} & \text{―②} \end{cases}$ を満たす $\vec{x}$, $\vec{y}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

$\vec{x}$ を消す

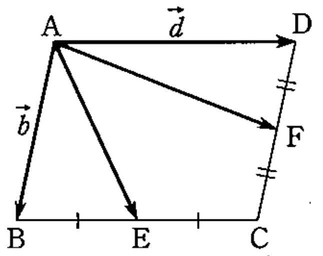
$$2\vec{x}-2\vec{y}=2\vec{a}+2\vec{b} \quad \text{―①×2}$$
$$-)\ 2\vec{x}+3\vec{y}=\vec{a}-\vec{b} \quad \text{―②}$$
$$-5\vec{y}=\vec{a}+3\vec{b}$$
$$\vec{y}=-\frac{1}{5}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$$

$\vec{y}$ を消す

$$3\vec{x}-3\vec{y}=3\vec{a}+3\vec{b} \quad \text{―①×3}$$
$$+)\ 2\vec{x}+3\vec{y}=\vec{a}-\vec{b} \quad \text{―②}$$
$$5\vec{x}=4\vec{a}+2\vec{b}$$
$$\vec{x}=\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$

【平行四辺形とベクトルの分解】

10 平行四辺形 ABCD の辺 BC, CD の中点をそれぞれ E, F とする。また、$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。



(1) $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ をそれぞれ $\vec{b}$, $\vec{d}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{AE}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}$$
$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}$$

(2) $\vec{b}$, $\vec{d}$ をそれぞれ $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ を用いて表せ。

$$\begin{cases} 2\overrightarrow{AE}=2\vec{b}+\vec{d} & \text{―①} \\ 2\overrightarrow{AF}=\vec{b}+2\vec{d} & \text{―②} \end{cases}$$

$\vec{b}$ を消す

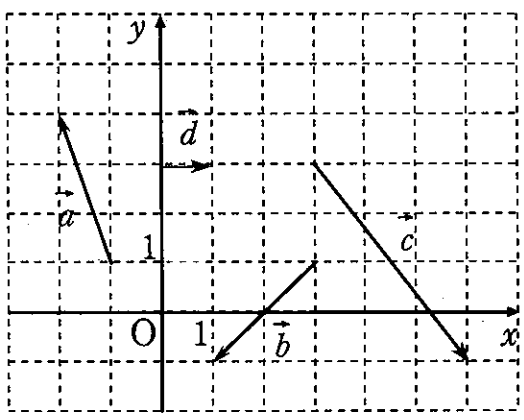
$$2\overrightarrow{AE}=2\vec{b}+\vec{d} \quad \text{―①}$$
$$-)\ 4\overrightarrow{AF}=2\vec{b}+4\vec{d} \quad \text{―②×2}$$
$$-3\vec{d}=2\overrightarrow{AE}-4\overrightarrow{AF}$$
$$\vec{d}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AF}$$

$\vec{d}$ を消す

$$4\overrightarrow{AE}=4\vec{b}+2\vec{d} \quad \text{―①×2}$$
$$-)\ 2\overrightarrow{AF}=\vec{b}+2\vec{d}$$
$$3\vec{b}=4\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{AF}$$
$$\vec{b}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AE}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$$

【ベクトルの成分表示】

11 右の図のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を、それぞれ成分表示せよ。



$$\vec{a}=(-1,\ 3)$$
$$\vec{b}=(-2,\ -2)$$
$$\vec{c}=(3,\ -4)$$
$$\vec{d}=(1,\ 0)$$

【成分表示によるベクトルの計算】

12 $\vec{a}=(3,\ -1)$, $\vec{b}=(-4,\ 2)$ のとき、次のベクトルを求めよ。

(1) $4\vec{a}-3\vec{b}$

$$=4(3,-1)-3(-4,2)$$
$$=(12,-4)+(12,-6)$$
$$=(24,-10)$$

(2) $(2\vec{a}-3\vec{b})-(3\vec{a}+5\vec{b})$

$$=2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{a}-5\vec{b}$$
$$=-\vec{a}-8\vec{b}$$
$$=-(3,-1)-8(-4,2)$$
$$=(-3,1)+(32,-16)$$
$$=(29,-15)$$

【ベクトルの分解と成分】

13 $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 3)$ とする。$\vec{c}=(8,\ -3)$ を、適当な実数 s, t を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

$$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$$
$$(8,-3)=s(2,1)+t(-1,3)$$
$$=(2s,\ s)+(-t,\ 3t)$$
$$=(2s-t,\ s+3t)$$

$$\begin{cases} 2s-t=8 & \text{―①} \\ s+3t=-3 & \text{―②} \end{cases}$$

$$2s-t=8$$
$$-)\ 2s+6t=-6$$
$$-7t=14$$
$$t=-2$$

① に代入

$$2s+2=8$$
$$2s=6$$
$$s=3$$

よって $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$

【ベクトルの平行】

14 2つのベクトル $\vec{a}=(4,\ x)$, $\vec{b}=(-2,\ -1)$ が平行になるように、x の値を定めよ。

$\boxed{\vec{a}=k\vec{b}}$

$\vec{a} /\!/ \vec{b}$ より

$$\vec{a}=k\vec{b}$$
$$(4,\ x)=k(-2,-1)$$
$$=(-2k,\ -k)$$

$$\begin{cases} 4=-2k & \text{―①} \\ x=-k & \text{―②} \end{cases}$$

① より $k=-2$

② 代入

$$x=2$$

【座標平面上の点とベクトル】

15 次の2点 A, B について、$\overrightarrow{AB}$ を成分表示し、$|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。

(1) A(5, 2), B(1, 6)

$$\overrightarrow{AB}=(1-5,\ 6-2)$$
$$=(-4,\ 4)$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{16+16}$$
$$=\sqrt{32}$$
$$=4\sqrt{2}$$

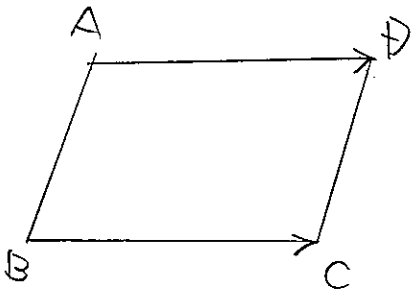
(2) A(−3, 4), B(2, 0)

$$\overrightarrow{AB}=(2+3,\ 0-4)$$
$$=(5,\ -4)$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{25+16}$$
$$=\sqrt{41}$$

平面ベクトル③

【点の座標とベクトル】

16 4点 A(1, 1), B(4, 2), C(5, 4), D(x, y) を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形であるように，x, y の値を定めよ。



$\overrightarrow{AD}=(x-1,\ y-1)$

$\overrightarrow{BC}=(1,\ 2)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

$(x-1,\ y-1)=(1,\ 2)$

$\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=2 \end{cases}$

よって

$x=2,\ y=3$

【ベクトルの内積】

17 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合に内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=3,\ \theta=45°$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot3\cdot\cos45°$

$=12\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

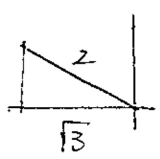
$=6\sqrt{2}$

(2) $|\vec{a}|=6,\ |\vec{b}|=6,\ \theta=150°$

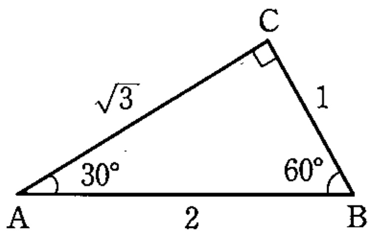
$\vec{a}\cdot\vec{b}=6\cdot6\cdot\cos150°$

$=6\cdot6\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=-18\sqrt{3}$



18 右の図の直角三角形 ABC において，次の内積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{AC}|\cos150°$

$=2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=-3$

(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

19 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(2,\ 5),\ \vec{b}=(3,\ -2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=6-10$

$=-4$

(2) $\vec{a}=(1,\ \sqrt{3}),\ \vec{b}=(\sqrt{3},\ 3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}+3\sqrt{3}$

$=4\sqrt{3}$

【ベクトルのなす角】

20 次の2つのベクトルのなす角を求めよ。

(1) $\vec{a}=(2,\ 1),\ \vec{b}=(-3,\ 1)$

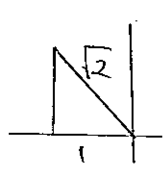
$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6+1=-5$

$|\vec{a}|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

$|\vec{b}|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$\cos\theta=\frac{-5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$



$\theta=135°$

(2) $\vec{a}=(1,\ \sqrt{3}),\ \vec{b}=(\sqrt{3},\ 1)$

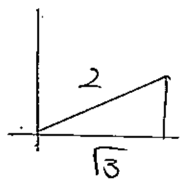
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$|\vec{a}|=\sqrt{1+3}=2$

$|\vec{b}|=\sqrt{3+1}=2$

$\cos\theta=\frac{2\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\theta=30°$

(3) $\vec{a}=(3,\ -1),\ \vec{b}=(2,\ 6)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=6-6$

$=0$

$\cos\theta=0$

$\theta=90°$

(4) $\vec{a}=(-4,\ 2),\ \vec{b}=(2,\ -1)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-8-2=-10$

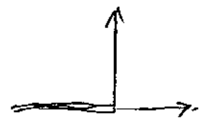
$|\vec{a}|=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$

$|\vec{b}|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$=\frac{-10}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}$

$=-1$



$\theta=180°$

【ベクトルの成分と垂直条件】

21 次の2つのベクトルが垂直になるような x の値を求めよ。

(1) $\vec{a}=(3,\ 6),\ \vec{b}=(x,\ 4)$

$\vec{a}\perp\vec{b}$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$3x+24=0$

$3x=-24$

$x=-8$

(2) $\vec{a}=(x,\ -1),\ \vec{b}=(x,\ x+2)$

$\vec{a}\perp\vec{b}$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$x^2-(x+2)=0$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=-1,\ 2$

22 次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}=(2,\ 1)$ に垂直で大きさが $\sqrt{10}$ のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

$\vec{b}=(x,\ y)$ とおく

$\vec{a}\perp\vec{b}$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$2x+y=0$ —①　　$y=-2x$ —①'

$|\vec{b}|=\sqrt{10}$ より

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{10}$

$x^2+y^2=10$ —②

①'を②に代入

$x^2+(-2x)^2=10$

$5x^2=10$

$x^2=2$

$x=\pm\sqrt{2}$

①'に代入

$\vec{b}=(\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$

(2) $\vec{a}=(4,\ 3)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

大きさ1

$\vec{e}=(x,\ y)$ とおく

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より

$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$

$4x+3y=0$ ―①

$3y=-4x$

$y=-\frac{4}{3}x$ ―①'

$|\vec{e}|=1$ より

$\sqrt{x^2+y^2}=1$

$x^2+y^2=1$ ―②

$x^2=\frac{9}{25}$

①'を②に代入

$x=\pm\frac{3}{5}$

$x^2+\left(-\frac{4}{3}x\right)^2=1$

①'に代入

$x^2+\frac{16}{9}x^2=1$

$\frac{25}{9}x^2=1$

$\vec{e}=\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right),\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ //

【内積とベクトルの大きさ】

23 $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=9-6+4$

$=7$

$|\vec{a}+\vec{b}|>0$ より　$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$ //

(2) $|\vec{a}-2\vec{b}|$

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=9+12+16$

$=37$

$|\vec{a}-2\vec{b}|>0$ より　$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{37}$ //

24 $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=2$ で，ベクトル $3\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{a}+4\vec{b}$ が垂直であるとする。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

$\boxed{(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+4\vec{b})=0}$

$(3\vec{a}-2\vec{b})\perp(\vec{a}+4\vec{b})$ より

$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+4\vec{b})=0$

$3|\vec{a}|^2+10\vec{a}\cdot\vec{b}-8|\vec{b}|^2=0$

$12+10\vec{a}\cdot\vec{b}-32=0$

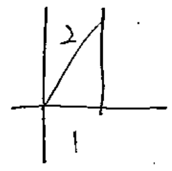
$10\vec{a}\cdot\vec{b}=20$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ //

(2) $\vec{a},\ \vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$=\frac{2}{2\cdot2}$



$=\frac{1}{2}$

$\theta=60^\circ$ //

25 $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2,\ |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=7$

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7$

$9-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=7$

$-2\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ //

(2) $\vec{a},\ \vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$=\frac{3}{3\cdot2}$

$=\frac{1}{2}$

$\theta=60^\circ$ //

(3) $|2\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=36-2+4$

$=38$

$|2\vec{a}-\vec{b}|>0$ より

$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{38}$ //

【内積と三角形の面積】

26 3点O(0, 0), A(3, 1), B(2, 4)について，次のものを求めよ

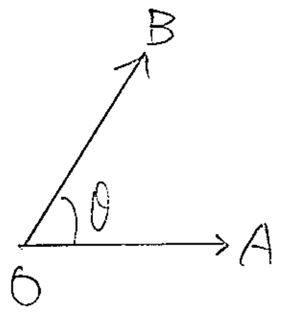
(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA} = (3, 1)$

$\overrightarrow{OB} = (2, 4)$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 6+4 = 10$

(2) ∠AOBの大きさ

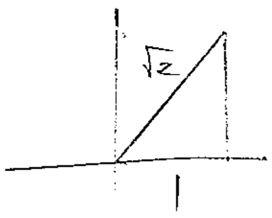


$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$

$$\left(\begin{array}{l}|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}\\ |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}\end{array}\right)$$

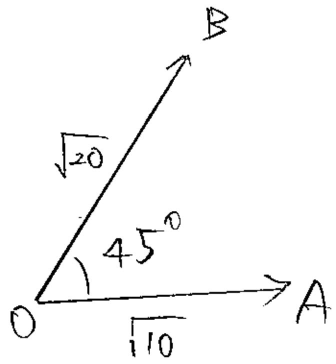
$$= \frac{10}{\sqrt{10}\sqrt{20}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$



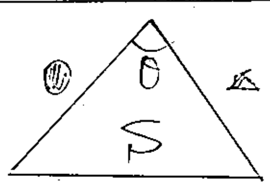
よって．$\theta = 45°$

(3) △OABの面積Sを求めよ。



$$S = \frac{1}{2}\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}\sin 45°$$

$$= 5$$

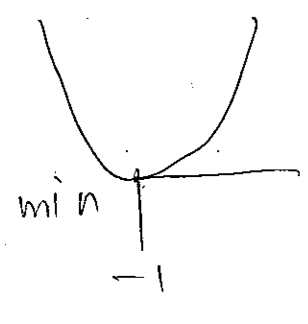


$$S = \frac{1}{2}●▲\sin\theta$$

【ベクトルの大きさと最小値】

27 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$の最小値とそのときの実数tの値を求めよ。

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2t\,\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2|\vec{b}|^2$$
$$= 9 + 8t + 4t^2$$
$$= 4t^2+8t+9$$
$$= 4(t^2+2t)+9$$
$$= 4\{(t+1)^2-1\}+9$$
$$= 4(t+1)^2-4+9$$
$$= 4(t+1)^2+5$$



$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$の min 5 $(t=-1)$

5 $|\vec{a}+t\vec{b}|$の min $\sqrt{5}$ $(t=-1)$

【分点の位置ベクトル】

28 2点A$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$を結ぶ線分ABに対して，次のような点の位置ベクトルを求めよ。

(1) 2：3に内分する点

$$\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3} = \frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$

(2) 3：1に内分する点

$$\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{3+1} = \frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

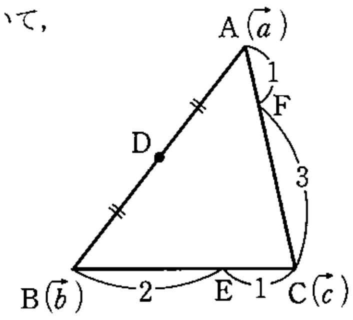
(3) 4：1に外分する点

$$\frac{-\vec{a}+4\vec{b}}{4-1} = -\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$$

(4) 中点

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

29 3点A$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$, C$(\vec{c})$を頂点とする△ABCにおいて，辺ABの中点をD，辺BC, CAをそれぞれ2：1, 3：1に内分する点をE, Fとする。次のベクトルを$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$を用いて表せ。



(1) $\overrightarrow{AC}$

$$= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$
$$= \vec{c} - \vec{a}$$

(2) $\overrightarrow{BE}$

$$= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB}$$
$$= \frac{\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{2+1} - \overrightarrow{OB}$$
$$= \frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}-\vec{b}$$
$$= -\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$$

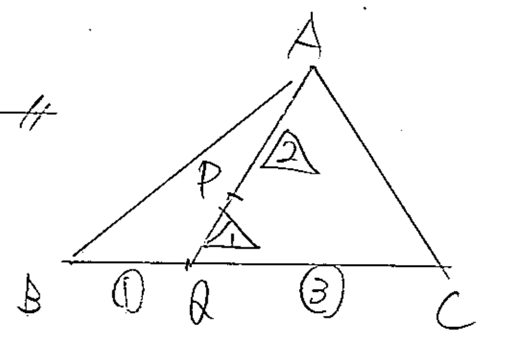
(3) $\overrightarrow{DF}$

$$= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD}$$
$$= \frac{3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{1+3} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$
$$= \frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$$
$$= \frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

30 △ABCと点Pに対して，$2\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$が成り立っている。

(1) $\overrightarrow{AP}$を$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$を用いて表せ。

$$2\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$6\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AP} = \frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{6}$$



(2) 点Pはどのような位置にあるか。

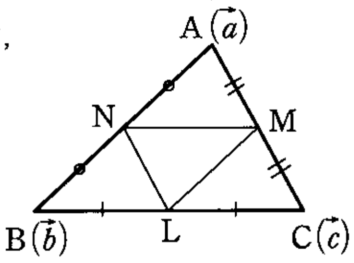
$$\overrightarrow{AP} = \frac{4}{6}\cdot\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{1+3}$$

BCを1：3に内分する点をQとすると

AQを2：1に内分する点

【重心の位置ベクトル】

31 3点A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$)を頂点とする△ABCにおいて，辺BC, CA, ABの中点を，それぞれL, M, Nとする。また，△LMNの重心をG'とする。



(1) 点G'の位置ベクトル$\vec{g'}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}}{3}$$

$$\left(\overrightarrow{OL} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\ \overrightarrow{OM} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \overrightarrow{ON} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)$$

$$= \frac{\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}}{3}$$

$$= \frac{\frac{2\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}}{2}}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

(2) 等式$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$が成り立つことを示せ。

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OA} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\vec{a} = \frac{\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a}}{2}$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}-\vec{b} = \frac{\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}}{2}$$

$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OC} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\vec{c} = \frac{\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}}{2}$$

$$(左辺) = \frac{\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a}}{2}+\frac{\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}}{2}+\frac{\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}}{2}$$

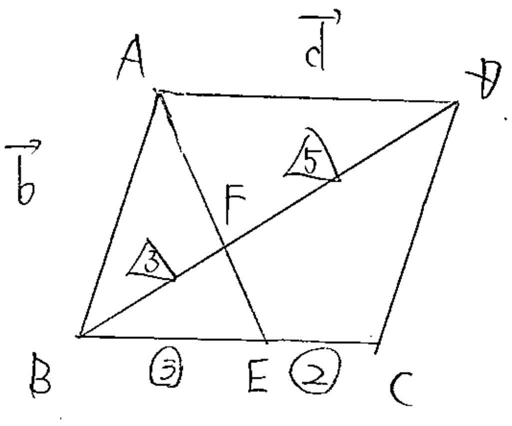
$$= \vec{0} = (右辺)$$

よって　(左辺) = (右辺)

【一直線上にある3点】

32 平行四辺形ABCDにおいて，辺BCを3:2に内分する点をE，対角線BDを3:5に内分する点をFとする。このとき，3点A, F, Eは一直線上にあることを証明せよ。

$\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AE}$ を示す



$$\overrightarrow{AF} = \frac{5\vec{b}+3\vec{d}}{3+5} = \frac{5\vec{b}+3\vec{d}}{8}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2\vec{b}+3\overrightarrow{AC}}{3+2} = \frac{2\vec{b}+3(\vec{b}+\vec{d})}{5}$$

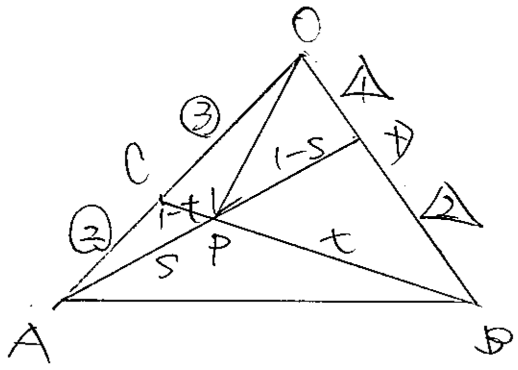
$$= \frac{5\vec{b}+3\vec{d}}{5}$$

よって　$\overrightarrow{AF} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AE}$

従って　3点, A, F, Eは一直線上

【交点の位置ベクトル[1]】

33 △OABにおいて，辺OAを3:2に内分する点をC，辺OBを1:2に内分する点をDとし，線分ADと線分BCの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とするとき，$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いて表せ。



△OAD において

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OD}$$

$$= (1-s)\vec{a} + \frac{1}{3}s\vec{b}$$

△OCB において

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OC} + (1-t)\overrightarrow{OB}$$

$$= \frac{3}{5}t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad —③$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は一次独立なので

$$\begin{cases} 1-s = \frac{3}{5}t \\ \frac{1}{3}s = 1-t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5-5s = 3t & —① \\ s = 3-3t & —② \end{cases}$$

②を①に代入

$$5-5(3-3t) = 3t$$
$$5-15+15t = 3t$$
$$12t = 10$$
$$t = \frac{5}{6}$$

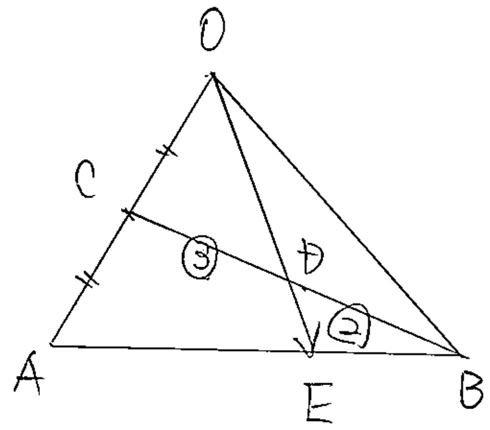
③に代入

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$

【交点の位置ベクトル[2]】

34 △OABにおいて，辺OAの中点をC，線分BCを2:3に内分する点をDとし，直線ODと辺ABの交点をEとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とするとき，$\overrightarrow{OE}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いて表せ。

3点 O, D, E は一直線上



$$\overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OD}$$

$$= k\left(\frac{2\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OB}}{3+2}\right)$$

$$= k\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}\right)$$

$$= k\left(\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}\right)$$

$$= \frac{1}{5}k\vec{a} + \frac{3}{5}k\vec{b} \quad —①$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は一次独立なので

$$\frac{1}{5}k + \frac{3}{5}k = 1$$
$$\frac{4}{5}k = 1$$
$$k = \frac{5}{4}$$

①に代入

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

平面ベクトル⑦

【直線と円の方程式】

35 $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{p}=(x,\ y)$ として，次のベクトル方程式で表される図形を，x と y の方程式で表せ。

(1) $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$

$$(x,y)=(3,2)+t(-1,2)$$
$$=(3,2)+(-t,2t)$$
$$=(3-t,\ 2+2t)$$
$$\begin{cases} x=3-t & —① \\ y=2+2t & —② \end{cases}$$
$$t=3-x \quad —①'$$

①'を②に代入　$y=2+2(3-x)$

$$\underline{2x+y-8=0}$$

(2) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$

$$\vec{p}-\vec{a}=(x,y)-(3,2)$$
$$=(x-3,\ y-2)$$
$$\vec{b}=(-1,\ 2)$$

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$ より

$$-x+3+2y-4=0$$
$$2y=x+1$$
$$\underline{x-2y+1=0}$$

$\vec{a}=(○,△)$　$\vec{b}=(○,△)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=○○+△△$

x成分どうし　y成分どうし

(3) $|\vec{p}-\vec{a}|=2$

$\vec{p}-\vec{a}=(x-3,\ y-2)$　((2)より)

$|\vec{p}-\vec{a}|=2$ より

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=2$$
$$\underline{(x-3)^2+(y-2)^2=4}$$

$\vec{a}=(○,△)$

$|\vec{a}|=\sqrt{○^2+△^2}$

(4) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

$\vec{p}-\vec{a}=(x-3,\ y-2)$　((2)より)

$$\vec{p}-\vec{b}=(x,y)-(-1,2)$$
$$=(x+1,\ y-2)$$

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ より

$$(x-3)(x+1)+(y-2)(y-2)=0$$
$$x^2-2x-3+(y-2)^2=0$$
$$(x-1)^2-1-3+(y-2)^2=0$$
$$\underline{(x-1)^2+(y-2)^2=4}$$

【直線のベクトル方程式】

36 次の条件を満たす直線の方程式を，ベクトルを用いて求めよ。

(1) A$(-2,\ 3)$ を通り，ベクトル $\vec{d}=(2,\ 1)$ に平行

P(x,y) とする

$$\boxed{\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}}$$
$$(x,y)=(-2,3)+t(2,1)$$
$$=(-2+2t,\ 3+t)$$
$$\begin{cases} x=-2+2t & —① \\ y=3+t & —② \end{cases}$$
$$t=y-3 \quad —②'$$

②'を①に代入

$$x=-2+2(y-3)$$
$$x=-2+2y-6$$
$$\underline{x-2y+8=0}$$

(2) 2点A$(-1,\ 2)$，B$(3,\ 1)$ を通る

P(x,y) とする

$$\overrightarrow{AB}=(4,-1)$$
$$\boxed{\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}}$$
$$(x,y)=(-1,2)+t(4,-1)$$
$$=(4t-1,\ -t+2)$$
$$\begin{cases} x=4t-1 & —① \\ y=-t+2 & —② \end{cases}$$
$$t=2-y \quad —②'$$

②'を①に代入

$$x=4(2-y)-1$$
$$x=8-4y-1$$
$$\underline{x+4y-7=0}$$

37 次の条件を満たす直線の方程式を，ベクトルを用いて求めよ。

(1) A$(3,\ 1)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(2,\ 3)$ に垂直

P(x,y) とする

$$\overrightarrow{AP}=(x-3,\ y-1)$$
$$\boxed{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0}$$
$$2(x-3)+3(y-1)=0$$
$$2x-6+3y-3=0$$
$$2x+3y-9=0$$

(2) 3点A$(3,\ 1)$，B$(-2,\ 2)$，C$(1,\ -5)$ について，点Cを通り，直線ABに垂直

P(x,y) とする

$$\overrightarrow{AB}=(-5,\ 1)$$
$$\overrightarrow{CP}=(x-1,\ y+5)$$
$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}=0}$$
$$-5(x-1)+y+5=0$$
$$-5x+5+y+5=0$$
$$\underline{5x-y-10=0}$$

【円のベクトル方程式】

38 定点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) と動点 P($\vec{p}$) について，次のベクトル方程式で表される点 P はどのような図形上を動くか。

(1) $|\vec{p}-\vec{a}|=3$

中心 点A
半径 3 の円

(2) $|6\vec{p}-3\vec{a}|=2$

$6\left|\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|=2$

$\left|\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|=\frac{1}{3}$

中心 線分OAの中点,
半径 $\frac{1}{3}$ の円

(3) $|2\vec{p}-\vec{a}-\vec{b}|=8$

$2\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}}{2}-\frac{\vec{b}}{2}\right|=8$

$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=4$

中心 線分ABの中点,
半径 4 の円

(4) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

直径AB の円

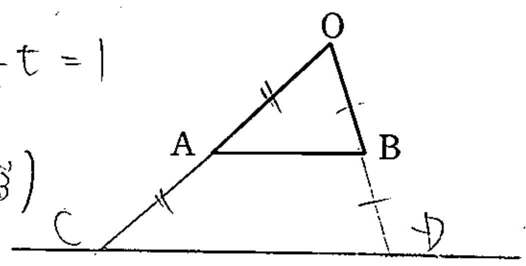
【終点の存在範囲】

39 △OAB において，次の式を満たす点 P の存在範囲を求めよ。

(1) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$, $s+t=2$

$\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t=1$

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}s(2\overrightarrow{OA})+\frac{1}{2}t(2\overrightarrow{OB})$

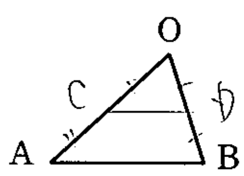


直線CD

(2) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$, $s+t=\frac{1}{2}$, $s\geqq0$, $t\geqq0$

$2s+2t=1$

$\overrightarrow{OP}=2s\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

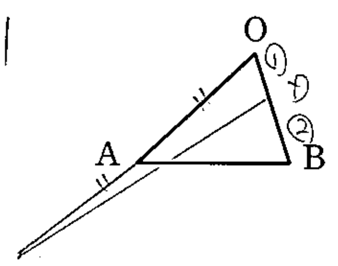


線分CD

(3) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$, $s+6t=2$, $s\geqq0$, $t\geqq0$

$\frac{1}{2}s+3t=1$

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}s(2\overrightarrow{OA})+3t\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)$



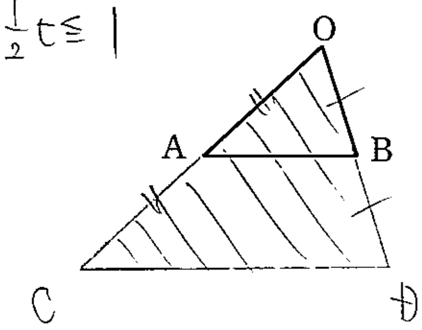
線分CD

40 △OAB において，次の式を満たす点 P の存在範囲を求めよ。

(1) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$, $0\leqq s+t\leqq2$, $s\geqq0$, $t\geqq0$

$0\leqq\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t\leqq1$

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}s(2\overrightarrow{OA})+\frac{1}{2}t(2\overrightarrow{OB})$

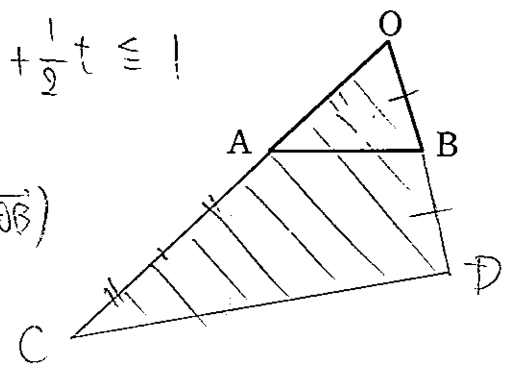


△OCDの周および内部

(2) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$, $0\leqq2s+3t\leqq6$, $s\geqq0$, $t\geqq0$

$0\leqq\frac{1}{3}s+\frac{1}{2}t\leqq1$

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}s(3\overrightarrow{OA})+\frac{1}{2}t(2\overrightarrow{OB})$



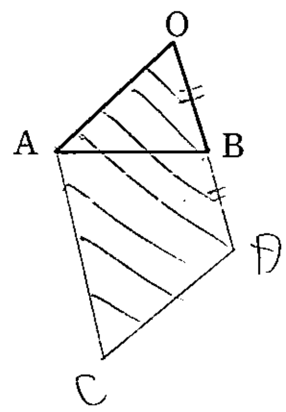
△OCDの周および内部

41 △OAB において，次の式を満たす点 P の存在範囲を求めよ。

(1) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$, $0\leqq s\leqq1$, $0\leqq t\leqq2$

$0\leqq\frac{1}{2}t\leqq1$

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}t(2\overrightarrow{OB})$

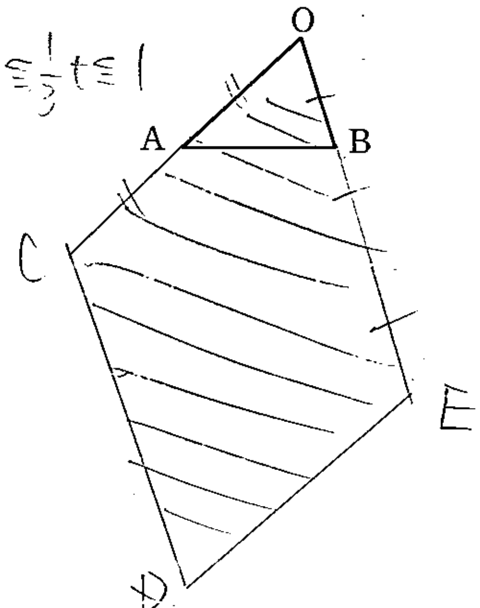


平行四辺形OACDの周および内部

(2) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$, $0\leqq s\leqq2$, $0\leqq t\leqq3$

$0\leqq\frac{1}{2}s\leqq1$, $0\leqq\frac{1}{3}t\leqq1$

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}s(2\overrightarrow{OA})+\frac{1}{3}t(3\overrightarrow{OB})$



平行四辺形OCDEの周および内部