

数列①

【数列の表記】

1 一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ について、初項から第4項までを求めよ。

(1) $a_n = 2n - 1$

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7$

(2) $a_n = n(n+1)$

$a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 12, a_4 = 20$

(3) $a_n = 2^n$

$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16$

【等差数列の一般項】

2 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また、第10項を求めよ。

(1) 初項5, 公差4

$a_n = 5 + (n-1) \cdot 4$
 $= 4n + 1$

$a_{10} = 40 + 1$
 $= 41$

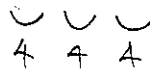
(2) 初項10, 公差-5

$a_n = 10 + (n-1)(-5)$
 $= -5n + 15$

$a_{10} = -50 + 15$
 $= -35$

3 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

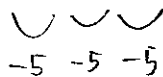
(1) 2, 6, 10, 14, ...



$a_n = 2 + (n-1) \cdot 4$
 $= 4n - 2$

$a = 2, d = 4$

(2) 100, 95, 90, 85, ...



$a_n = 100 + (n-1)(-5)$
 $= -5n + 105$

$a = 100, d = -5$

4 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 第4項が15, 第8項が27

$a_4 = 15, a_8 = 27$

$a_4 = a + 3d = 15$ — ①

$a_8 = a + 7d = 27$ — ②

② - ①

①に代入

\rightarrow

$4d = 12$

$a + 9 = 15$

$d = 3$

$a = 6$

$a_n = 6 + (n-1) \cdot 3$
 $= 3n + 3$

(2) 第5項が20, 第10項が0

$a_5 = 20, a_{10} = 0$

$a_5 = a + 4d = 20$ — ①

$a_{10} = a + 9d = 0$ — ②

② - ①

②に代入

\rightarrow

$5d = -20$

$a = 36$

$a_n = 36 + (n-1)(-4)$
 $= -4n + 40$

$d = -4$

5 第5項が3, 第10項が18である等差数列 $\{a_n\}$ において、

(1) 初項と公差を求めよ。

$a_5 = a + 4d = 3$ — ①

$a_{10} = a + 9d = 18$ — ②

② - ①

①に代入

$5d = 15$

$a + 12 = 3$

$d = 3$

$a = -9$

(2) 第21項を求めよ。

(1)より

$a_n = -9 + (n-1) \cdot 3$
 $= 3n - 12$

\rightarrow

$a_{21} = 63 - 12$
 $= 51$

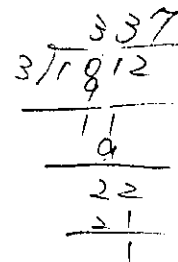
(3) 初めて1000を超えるのは、第何項か。

$a_n = 3n - 12 > 1000$

$3n > 1012$

$n > 337.3 \dots$

\rightarrow 第338項



【等差数列をなす3数】

6 次の数列が等差数列であるとき、 x の値を求めよ。

(1) 3, x , 7, ...

$x - 3 = 7 - x$

$2x = 10$

$x = 5$

(2) $\frac{1}{12}, \frac{1}{x}, \frac{1}{6}, \dots$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} - \frac{1}{x}$

$3x = 24$

$12 - x = 24 - 12$

$x = 8$

7 等差数列をなす3つの数があるとき、それらの和が9, 積が15であるという。この3つの数を求めよ。

3数 $a-d, a, a+d$ とおく

和が9より

$(a-d) + a + (a+d) = 9$

$3a = 9$

$a = 3$

積が15より

$(3-d) \cdot 3 \cdot (3+d) = 15$

$9 - d^2 = 5$

$d^2 = 4$

$d = \pm 2$

\rightarrow

$d = 2$ のとき 1, 3, 5

$d = -2$ のとき 5, 3, 1

1, 3, 5

数列②

【等差数列の和】

8 次の和を求めよ。

(1) 初項 10, 公差 -4 の等差数列の初項から第 15 項までの和 S_{15} を求めよ。

$$S_{15} = \frac{15}{2} \{2 \cdot 10 + (15-1) \cdot (-4)\}$$

$$= \frac{15}{2} \{20 - 56\}$$

$$= \underline{\underline{-270}}$$

(2) 初項 2, 末項 10, 項数 9 の等差数列の和 S_9 を求めよ。

$$S_9 = \frac{9}{2} (2 + 10)$$

$$= \underline{\underline{54}}$$

(3) 初項 1, 公差 2 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$S_n = \frac{n}{2} \{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 2\}$$

$$= \frac{n}{2} \{2 + 2n - 2\}$$

$$= \underline{\underline{n^2}}$$

9 次の等差数列の和 S を求めよ。

(1) 2, 6, 10, ..., 74

$$a_n = 2 + (n-1)d \quad d=2$$

$$= 4n - 2$$

$$4n - 2 = 74$$

$$4n = 76$$

$$n = 19$$

$$S_{19} = \frac{19}{2} \{2 + 74\}$$

$$= 19 \cdot 38$$

$$= \underline{\underline{722}}$$

(2) 102, 96, 90, ..., 6

$$a_n = 102 + (n-1)(-6) \quad d=-6$$

$$= -6n + 108$$

$$-6n + 108 = 6$$

$$6n = 102$$

$$n = 17$$

$$S_{17} = \frac{17}{2} \{102 + 6\}$$

$$= 17 \cdot 54$$

$$= \underline{\underline{918}}$$

【等差数列の和から初項と公差を求める】

10 初項が 50, 末項が 10, 和が 330 である等差数列の項数 n と公差 d を求めよ。

$$\frac{n}{2} (50 + 10) = 330$$

$$30n = 330$$

$$n = 11$$

50, ..., 10
項数 11

$$a_{11} = 10$$

$$50 + (11-1)d = 10$$

$$10d = -40$$

$$d = \underline{\underline{-4}}$$

11 等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。初項から第 10 項までの和が 100 で、初項から第 20 項までの和が 400 であるとき、 S_n を求めよ。

$$S_{10} = 100 \quad S_{20} = 400$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} \{2a + 9d\} = 100$$

$$2a + 9d = 20 \quad \text{--- ①}$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} \{2a + 19d\} = 400$$

$$2a + 19d = 40 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{②} - \text{①} \quad \text{①} = 5d \quad d=2$$

$$10d = 20 \quad 2a + 18 = 20 \quad 2a = 2 \quad a = 1$$

$$S_n = \frac{n}{2} \{2 + (n-1) \cdot 2\}$$

$$= \frac{n}{2} \{2n\}$$

$$= \underline{\underline{n^2}}$$

【倍数の和】

12 1 から 100 までの整数について、次のような数の和を求めよ。

(1) 6 の倍数

6, 12, 18, ..., 96

$a=6, d=6, n=16$ の等差数列

$$S_n = \frac{16}{2} \{12 + 15 \cdot 6\}$$

$$= 8 \cdot 102$$

$$= \underline{\underline{816}}$$

(2) 6 の倍数ではない数

$1^2 \sim 100^2$ の和から 6 の倍数を除く

$$S_{100} = \frac{100}{2} \{2 + 99\}$$

$$= 5050$$

$$5050 - 816 = \underline{\underline{4234}}$$

【等差数列の和の最大値】

13 初項が 77, 公差が -3 である数列 $\{a_n\}$ がある。

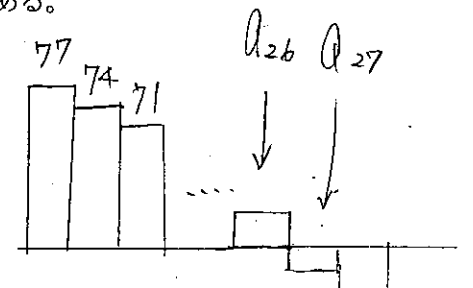
(1) 第何項が初めて負の数になるか。

$$a_n = 77 + (n-1)(-3)$$

$$= -3n + 80 < 0$$

$$\Leftrightarrow n > 80/3$$

$$n > 26.6$$



\therefore 第 27 項

(2) 初項から第何項までの和が最大であるか。また、その和を求めよ。

(1) \therefore 初項から第 26 項

$$S_{26} = \frac{26}{2} \{154 + 25(-3)\}$$

$$= 13 \cdot 79$$

$$= \underline{\underline{1027}}$$

数列③

【等比数列の表記】

14 次のような等比数列の初項から第4項までを書け。

(1) 初項1, 公比3

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 9, a_4 = 27 //$$

(2) 初項 $-\frac{1}{2}$, 公比 $-\frac{1}{2}$

$$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = -\frac{1}{8}, a_4 = \frac{1}{16} //$$

【等比数列の一般項】

15 次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また、第5項を求めよ。

(1) 初項2, 公比3

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} //$$

$$a_5 = 2 \cdot 3^4 = 162 //$$

(2) 初項1, 公比-3

$$a_n = (-3)^{n-1} //$$

$$a_5 = (-3)^4 = 81 //$$

(3) 初項2, 公比2

$$a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n //$$

$$a_5 = 2^5 = 32 //$$

(4) 初項-3, 公比 $\frac{1}{2}$

$$a_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} //$$

$$a_5 = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = -\frac{3}{16} //$$

16 次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$

$$a = \frac{3}{2}, r = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} //$$

(2) 5, -5, 5, -5, ...

$$a = 5, r = -1$$

$$a_n = 5 \cdot (-1)^{n-1} //$$

(3) $\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, 4+3\sqrt{2}, \dots$

$$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

$$a = \sqrt{2}, r = \sqrt{2} + 1$$

$$a_n = \sqrt{2} (\sqrt{2} + 1)^{n-1} //$$

17 次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 第2項が6, 第4項が54

$$a_2 = 6, a_4 = 54$$

$$a_2 = ar = 6 \quad \text{--- ①}$$

$$a_4 = ar^3 = 54$$

$$ar \cdot r^2 = 54 \quad \text{--- ②}$$

$$6r^2 = 54$$

$$r^2 = 9$$

$$r = \pm 3$$

$$r = 3 \text{ のとき } \text{①に代入}$$

$$3a = 6$$

$$a = 2$$

$$\text{①に代入}$$

$$r = 3 \text{ のとき}$$

$$3a = 6$$

$$a = 2$$

$$r = -3 \text{ のとき}$$

$$-3a = 6$$

$$a = -2$$

$$よって$$

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$a_n = (-2) \cdot (-3)^{n-1} //$$

(2) 第5項が-9, 第7項が-27

$$a_5 = -9, a_7 = -27$$

$$a_5 = ar^4 = -9 \quad \text{--- ①}$$

$$a_7 = ar^6 = -27$$

$$ar^4 r^2 = -27 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①} \times \text{②に代入}$$

$$-9r^2 = -27$$

$$r^2 = 3$$

$$r = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{①に代入}$$

$$r = \sqrt{3} \text{ のとき}$$

$$9a = -9$$

$$a = -1$$

$$r = -\sqrt{3} \text{ のとき}$$

$$9a = -9$$

$$a = -1$$

$$よって$$

$$a_n = -(\sqrt{3})^{n-1}$$

$$a_n = -(-\sqrt{3})^{n-1} //$$

【等比数列をなす3数】

18 次の数列は等比数列である。x, yの値を求めよ。

(1) 3, x, 9, ...

$$\frac{x}{3} = \frac{9}{x}$$

$$x^2 = 27 \quad x = \pm 3\sqrt{3} //$$

(2) x, -5, x, y, ...

$$\text{①} \text{ ②}$$

$$\text{②より}$$

$$\text{①より}$$

$$\frac{-5}{x} = \frac{x}{-5}$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

$$\frac{x}{-5} = \frac{y}{x}$$

$$x^2 = -5y$$

$$y = -\frac{x^2}{5}$$

$$x = 5 \text{ のとき } y = -5$$

$$x = -5 \text{ のとき } y = -5 //$$

19 数列24, a, bがこの順に等差数列をなし、数列a, b, 8がこの順に等比数列をなすという。このとき、a, bの値を求めよ。

等差数列より

$$a - 24 = b - a$$

$$2a - b = 24 \quad \text{--- ①}$$

等比数列より

$$\frac{b}{a} = \frac{8}{b}$$

$$b^2 = 8a$$

$$a = \frac{1}{8} b^2 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{②} \times \text{①に代入}$$

$$2 \left(\frac{1}{8} b^2\right) - b = 24$$

$$\frac{1}{4} b^2 - b - 24 = 0$$

$$b^2 - 4b - 96 = 0$$

$$(b+8)(b-12) = 0$$

$$b = -8, 12$$

$$\text{①に代入}$$

$$b = -8 \text{ のとき } a = 8$$

$$b = 12 \text{ のとき } a = 18 //$$

数列④

【等比数列の和】

20 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) 2, 6, 18, 54, ……

$$S_n = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1$$

(2) 3, -6, 12, -24, ……

$$S_n = \frac{3\{1 - (-2)^n\}}{1 + 2} = \frac{1 - (-2)^n}{1 + 2}$$

(3) 12, 4, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$, ……

$$S_n = \frac{12\{1 - (\frac{1}{3})^n\}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{12\{1 - (\frac{1}{3})^n\}}{\frac{2}{3}} = 18\{1 - (\frac{1}{3})^n\}$$

(4) 2, 2x, 2x², 2x³, ……

$$S_n = \frac{2(x^n - 1)}{x - 1} \quad x \neq 1 \text{ のとき}$$

$x = 1$ のとき
2, 2, 2, 2, ……
 $n =$
 $S_n = 2n$

21 初項が 5, 公比が 2 である等比数列において、第 5 項から第 10 項までの和を求めよ。

$$S_n = \frac{5(2^n - 1)}{2 - 1} \quad S_{10} - S_4$$

$$S_4 = 5(2^4 - 1) = 75$$

$$S_{10} = 5(2^{10} - 1) = 5115$$

$$S_{10} - S_4 = 5115 - 75 = 5040$$

【等比数列の和から初項と公差を求める】

22 初項から第 3 項までの和が 7, 第 3 項から第 5 項までの和が 28 となる等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

$$\begin{matrix} a & ar & ar^2 & ar^3 & ar^4 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & & & 28 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a + ar + ar^2 = 7 & \text{--- (1)} \\ ar^2 + ar^3 + ar^4 = 28 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

$$r^2(a + ar + ar^2) = 28 \text{ --- (2)'}$$

(2)' = (1) \times (r^2) (1) = (r^2) \times (2)

$$\begin{matrix} \triangleright r^2 = 28 & r = 2a \text{ と } \pm & \triangleright a = 7 \\ r^2 = 4 & & a = 1 \\ r = \pm 2 & r = -2 \text{ のとき } & \triangleright a = 7 \\ & & a = \frac{7}{3} \end{matrix}$$

$I \triangleright 2$
 $\begin{matrix} h = 2n \text{ と } \pm & a = 1 \\ r = -2n \text{ と } \pm & a = \frac{7}{3} \end{matrix}$

【 Σ の計算】

23 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^n 5^{k-1} = 5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^{n-1}$

初 1 公比 5 項数 n の等比数列の和

$$= \frac{1(5^n - 1)}{5 - 1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$$

(2) $\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{n-1}$

初 3 公比 3 項数 n-1 の等比数列の和

$$= \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = \frac{3}{2}(3^{n-1} - 1)$$

24 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^n (4k - 5) = 4 \sum_{k=1}^n k - 5 \sum_{k=1}^n 1$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - 5n$$

$$= 2n(n+1) - 5n$$

$$= n(2n - 3)$$

(2) $\sum_{k=1}^n (k^2 - 3k + 2) = \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + 2 \sum_{k=1}^n 1$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{3}{2}n(n+1) + 2n$$

$$= \frac{1}{6}\{n(n+1)(2n+1) - 9n(n+1) + 12n\}$$

$$= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) - 9(n+1) + 12\}$$

$$= \frac{1}{6}n\{2n^2 + 3n + 1 - 9n - 9 + 12\}$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^2 - 6n + 4)$$

$$= \frac{1}{3}n(n^2 - 3n + 2) = \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$$

(3) $\sum_{k=1}^n k(k^2 + 1) = \sum_{k=1}^n (k^3 + k) = \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{4}\{n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)\}$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1) + 2\}$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2 + n + 2)$$

数列⑤

$$\begin{aligned}
 (4) \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1) &= 2 \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) + (n-1) \\
 &= n(n-1) + (n-1) \\
 &= \underline{\underline{(n-1)(n+1)}} //
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \sum_{k=1}^{2n} (2k+3) &= 2 \sum_{k=1}^{2n} k + 3 \sum_{k=1}^{2n} 1 \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2} 2n(2n+1) + 3 \cdot 2n \\
 &= 2n(2n+1) + 6n \\
 &= 2n \{ (2n+1) + 3 \} \\
 &= 2n(2n+4) \\
 &= \underline{\underline{4n(n+2)}} //
 \end{aligned}$$

25 次の和を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \sum_{k=1}^{15} 2 &= 2 \sum_{k=1}^{15} 1 \\
 &= 2 \cdot 15 \\
 &= \underline{\underline{30}} //
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \sum_{k=1}^{20} k &= \frac{1}{2} 20 \cdot 21 \\
 &= 10 \cdot 21 \\
 &= \underline{\underline{210}} //
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2 &= \sum_{k=1}^{12} k^2 \\
 &= \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 13 \cdot 25 \\
 &= \underline{\underline{650}} //
 \end{aligned}$$

26 次の和を求めよ。

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 13 + \dots + n(6n-5)$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k(6k-5) &= \sum_{k=1}^n (6k^2 - 5k) \\
 &= 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 5 \sum_{k=1}^n k \\
 &= 6 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 5 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\
 &= n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2} n(n+1) \\
 &= \frac{1}{2} \{ 2n(n+1)(2n+1) - 5n(n+1) \} \\
 &= \frac{1}{2} n(n+1) \{ 2(2n+1) - 5 \} \\
 &= \underline{\underline{\frac{1}{2} n(n+1)(4n-3)}} //
 \end{aligned}$$

27 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$1 \cdot 3, 2 \cdot 5, 3 \cdot 7, 4 \cdot 9, \dots, n \cdot (2n+1)$$

左 1, 2, 3, 4, ... 右 3, 5, 7, 9, ...
 初 3 公差 2 の等差数列
 第 n 項 = n 第 n 項 = $3 + (n-1) \cdot 2 = 2n+1$

∴

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k(2k+1) &= \sum_{k=1}^n (2k^2 + k) \\
 &= 2 \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) \\
 &= \frac{1}{3} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) \\
 &= \frac{1}{6} n(n+1) \{ 2(2n+1) + 3 \} \\
 &= \underline{\underline{\frac{1}{6} n(n+1)(4n+5)}} //
 \end{aligned}$$

28 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$\begin{aligned}
 &2, 2+5, 2+5+8, 2+5+8+11, \dots, 2+5+8+11+\dots \\
 &\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{n} \\
 &2 + 5 + 8 + 11 + \dots
 \end{aligned}$$

和 2 公差 3 項数 n の等差数列の和

$$\begin{aligned}
 \text{第 } n \text{ 項} &= \frac{n}{2} \{ 2 + (n-1) \cdot 3 \} \\
 &= \frac{n}{2} (3n+1)
 \end{aligned}$$

∴

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{k}{2} (3k+1) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2} k^2 + \frac{k}{2} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\
 &= \frac{1}{4} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{4} n(n+1) \\
 &= \frac{1}{4} n(n+1) \{ 2n+1 + 1 \} \\
 &= \frac{1}{4} n(n+1)(2n+2) \\
 &= \frac{1}{2} n(n+1)(n+1) \\
 &= \underline{\underline{\frac{1}{2} n(n+1)^2}} //
 \end{aligned}$$

数列⑥

【階差数列】

29 階差数列を利用して、次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $1, 2, 4, 7, 11, \dots \{a_n\}$
 $\quad \underbrace{\quad \quad}_{2=3-1} \underbrace{\quad \quad}_{4=7-3} \dots \{b_n\}$

$\{b_n\}$ は初項 1 公差 1 の等差数列

$b_n = n$

$n \geq 2$ のとき

$n = 1$ のとき

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k$

$a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1$

$= 1 + \frac{1}{2} n(n-1)$

$= 1$

$= \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n + 1$

\therefore

$a_n = \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n + 1$

(2) $2, 3, 5, 9, 17, \dots \{a_n\}$
 $\quad \underbrace{\quad \quad}_{3=2+1} \underbrace{\quad \quad}_{5=3+2} \dots \{b_n\}$

$\{b_n\}$ は初項 1 公比 2 の等比数列

$b_n = 2^{n-1}$

$n \geq 2$ のとき

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}$

$= 2 + \left[2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} \right]$
 初項 1 公比 2 項数 $n-1$ の等比数列の和

$= 2 + \frac{1(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$n = 1$ のとき

$a_1 = 2^0 + 1$

$= 2$

$= 2 + 2^{n-1} - 1$

$= 2^{n-1} + 1$

\therefore

$a_n = 2^{n-1} + 1$

【和 S_n と一般項 a_n 】

30 初項から第 n 項までの和 S_n が、次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $S_n = n^2 - n$

$n \geq 2$ のとき

$n = 1$ のとき

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$a_1 = S_1 = 1 - 1 = 0$

$= n^2 - n - \{ (n-1)^2 - (n-1) \}$

(① ≥ 2 のとき)

$= n^2 - n - (n^2 - 2n + 1 - n + 1)$

\therefore

$= n^2 - n - (n^2 - 3n + 2)$

$= 2n - 2$ — ①

$a_n = 2n - 2$

(2) $S_n = n^2 - n + 2$

$n \geq 2$ のとき

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 - n + 2 - \{ (n-1)^2 - (n-1) + 2 \}$

$= n^2 - n + 2 - \{ n^2 - 2n + 1 - n + 1 + 2 \}$

$= n^2 - n + 2 - (n^2 - 3n + 4)$

$= 2n - 2$ — ①

\therefore

$n = 1$ のとき

$a_1 = S_1 = 1 - 1 + 2 = 2$

$a_n = \begin{cases} 2n-2 & (n \geq 2) \\ 2 & (n=1) \end{cases}$

(① ≥ 2 のとき)

【部分分数分解】

31 次の和を求めよ。

$S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$S = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right\}$

$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{2n+1}{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$

【(等差)×(等比)型】

32 次の和を求めよ。

$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1}$

$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1}$

$- 2S = \quad \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$

$- S = \left[1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} \right] - n \cdot 2^n$
 初項 1 公比 2 項数 n の等比数列の和

$- S = \frac{2^n - 1}{2 - 1} - n \cdot 2^n$

$- S = 2^n - 1 - n \cdot 2^n$

$S = n \cdot 2^n - 2^n + 1$

$= (n-1)2^n + 1$

【群数列】

33 正の奇数の列を、次のような群に分ける。ただし、第 n 群には n 個の数が入るものとする。

① ② ③ ④ \dots (n)
 $1 \mid 3, 5 \mid 7, 9, 11 \mid 13, 15, 17, 19 \mid 21, \dots \mid 2N-1$
 第1群 第2群 第3群 第4群 第 n 群

(1) $n \geq 2$ のとき、第 n 群の最初の数 n の式で表せ。

① + ② + ③ + ④ + ... + (n-1) 何番目の
 初項 1 公差 1 項数 $n-1$ の等差数列

$S_{n-1} = \frac{n-1}{2} (1 + n-1)$

\therefore

$= \frac{1}{2} n(n-1)$

$> \left(\frac{1}{2} n(n-1) + 1 \right) - 1$

\therefore

$\left(\frac{1}{2} n(n-1) + 1 \right)$ 番目

$= n(n-1) + 2 - 1$

$= n^2 - n + 1$

(2) 第 15 群に入るすべての数の和 S を求めよ。

$15^2 - 15 + 1 = 221$

$211, 213, \dots$
 第15群

初項 211 公差 2 項数 15 の等差数列

$S_{15} = \frac{15}{2} \{ 211 - 2 + (15-1) \cdot 2 \}$

$= \frac{15}{2} \cdot 450$

$= 15 \cdot 225 = 3375$

数列⑦

【漸化式】

1 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=2, a_{n+1}=a_n+3$

初 2 公差 3 の等差数列

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$$

$$= 3n - 1$$

(2) $a_1=1, a_{n+1}=2a_n$

初 1 公比 2 の等比数列

$$a_n = 2^{n-1}$$

2 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1, a_{n+1}=a_n+3^n$

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k$$

$$= 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{n-1}$$

初 1 公比 3 項数 n の等比数列の和

$$= \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{3^n - 1}{2}$$

$n=1$ のとき

$$a_1 = \frac{3-1}{2}$$

$$= 1$$

よって

$$a_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

(2) $a_1=0, a_{n+1}=a_n+2n+1$

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$= n(n-1) + (n-1)$$

$$= (n-1)(n+1)$$

$n=1$ のとき

$$a_1 = (1-1)(1+1)$$

$$= 0$$

よって

$$a_n = (n-1)(n+1)$$

3 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=5, a_{n+1}=4a_n-6$

$$- 2 = 4 \cdot 2 - 6$$

$$x = 4x - 6$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

$$a_{n+1} - 2 = 4(a_n - 2)$$

$$b_n = a_n - 2 \text{ とおくと}$$

$$b_{n+1} = 4b_n$$

初 $b_1 = a_1 - 2 = 5 - 2 = 3$

の等比数列

公比 4

$$b_n = 3 \cdot 4^{n-1}$$

$$a_n - 2 = 3 \cdot 4^{n-1}$$

$$a_n = 3 \cdot 4^{n-1} + 2$$

(2) $a_1=3, a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$

$$- 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + 1$$

$$x = \frac{1}{2}x + 1$$

$$\frac{1}{2}x = 1$$

$$x = 2$$

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

$$b_n = a_n - 2 \text{ とおくと}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$$

初 $b_1 = a_1 - 2 = 3 - 2 = 1$

の等比数列

公比 $\frac{1}{2}$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n - 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$$

【3項間漸化式】

4 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=0, a_2=1, a_{n+2}-7a_{n+1}+10a_n=0$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 5(a_{n+1} - 2a_n)$$

$$(x-5)(x-2) = 0$$

$$x = 2, 5$$

初 $a_2 - 2a_1 = 1 - 0 = 1$

の等比数列

公比 5

$$a_{n+1} - 2a_n = 5^{n-1} \quad \text{--- ①}$$

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 5a_n)$$

初 $a_2 - 5a_1 = 1 - 0 = 1$

の等比数列

公比 2

$$a_{n+1} - 5a_n = 2^{n-1} \quad \text{--- ②}$$

① - ②

$$3a_n = 5^{n-1} - 2^{n-1}$$

$$a_n = \frac{5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}$$

数列⑧

【数学的帰納法】

5 数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

(1) $1+3+5+\dots+(2n+1)=n^2$ — ①

[1] $n=1$ のとき

(左辺) $= 2-1=1$

(右辺) $= 1^2=1$

よって $n=1$ のとき ① は成り立つ

[2] $n=k$ のとき

$1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$

が成り立つと仮定する

$n=k+1$ のとき

$1+3+5+\dots+(2k-1)+\{2(k+1)-1\}=(k+1)^2$

を示す。

(左辺) $= k^2 + \{2(k+1)-1\}$

$= k^2 + 2k + 1$

$= (k+1)^2$

$= (右辺)$

よって $n=k+1$ のとき ① は成り立つ

[1][2] より ① は成り立つ

(2) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ — ①

[1] $n=1$ のとき

(左辺) $= 1(1+1)=2$

(右辺) $= \frac{1}{3}1(1+1)(1+2)=2$

よって $n=1$ のとき ① は成り立つ

[2] $n=k$ のとき

$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

が成り立つと仮定する

$n=k+1$ のとき

$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$

$= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$ を示す

(左辺) $= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)$

$= \frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)\}$

$= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)\{k+3\}$

よって $n=k+1$ のとき ① は成り立つ

[1][2] より ① は成り立つ

6 n を 3 以上の自然数とすると、次の不等式を証明せよ。

$2^n > 2n+1$ — ①

[1] $n=3$ のとき

(左辺) $= 2^3=8$

(右辺) $= 4+1=5$

よって $n=3$ のとき ① は成り立つ

[2] $n=k$ のとき ($k \geq 4$)

$2^k > 2k+1$

が成り立つと仮定する

$n=k+1$ のとき

$2^{k+1} > 2(k+1)+1$ を示す

(左辺) - (右辺) $= 2^{k+1} - 2(k+1) - 1$

$= 2 \cdot 2^k - 2k - 3$

$> 2(2k+1) - 2k - 3$

$= 4k + 2 - 2k - 3$

$= 2k - 1 > 0$

よって $n=k+1$ のとき ① は成り立つ

[1][2] より ① は成り立つ

7 すべての自然数 n について、 $7^n - 1$ は 6 の倍数である。このことを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

[1] $n=1$ のとき

$7-1=6$

よって $n=1$ のとき ① は成り立つ

[2] $n=k$ のとき

$7^k - 1$ が 6 の倍数であるを仮定する

$7^k - 1 = 6N$ (N : 整数) とおける。

$n=k+1$ のとき

$7^{k+1} - 1$ が 6 の倍数であることを示す

$7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 7^k - 1$

$= 7 \cdot 7^k - 7 + 6$

$= 7(7^k - 1) + 6$

$= 7 \cdot 6N + 6$

$= 6(7N + 1)$

よって $n=k+1$ のとき ① は成り立つ

[1][2] より ① は成り立つ