【数列の表記】

1 一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 4 項までを求めよ。

(1) $a_n=2n-1$

$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=5,\ a_4=7$

(2) $a_n=n(n+1)$

$a_1=2,\ a_2=6,\ a_3=12,\ a_4=20$

(3) $a_n=2^n$

$a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=8,\ a_4=16$

【等差数列の一般項】

2 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 10 項を求めよ。

(1) 初項 5，公差 4

$a_n=5+(n-1)\cdot4$
$=4n+1$

$a_{10}=40+1$
$=41$

(2) 初項 10，公差 -5

$a_n=10+(n-1)(-5)$
$=-5n+15$

$a_{10}=-50+15$
$=-35$

3 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 2，6，10，14，……

$\underbrace{2,\ 6}_{4},\ \underbrace{10}_{4},\ \underbrace{14}_{4}$

$a=2,\ d=4$

$a_n=2+(n-1)\cdot4$
$=4n-2$

(2) 100，95，90，85，……

$-5\ \ -5\ \ -5$

$a=100,\ d=-5$

$a_n=100+(n-1)(-5)$
$=-5n+105$

4 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 第 4 項が15，第 8 項が 27

$\boxed{a_4=15}$ $\boxed{a_8=27}$

$a_4=a+3d=15$ —①
$a_8=a+7d=27$ —②

②－①
$4d=12$
$d=3$

①に代入
$a+9=15$
$a=6$

よって
$a_n=6+(n-1)\cdot3$
$=3n+3$

(2) 第 5 項が 20，第 10 項が 0

$\boxed{a_5=20}$ $\boxed{a_{10}=0}$

$a_5=a+4d=20$ —①
$a_{10}=a+9d=0$ —②

②－①
$5d=-20$
$d=-4$

②に代入
$a=36$

よって
$a_n=36+(n-1)(-4)$
$=-4n+40$

5 第 5 項が 3，第 10 項が 18 である等差数列 $\{a_n\}$ において，

(1) 初項と公差を求めよ。

$a_5=a+4d=3$ —①
$a_{10}=a+9d=18$ —②

②－①
$5d=15$
$d=3$

①代入
$a+12=3$
$a=-9$

(2) 第 21 項を求めよ。

(1)より
$a_n=-9+(n-1)\cdot3$
$=3n-12$

よって
$a_{21}=63-12$
$=51$

(3) 初めて 1000 を超えるのは，第何項か。

$a_n=3n-12>1000$
$3n>1012$
$n>337.3\cdots$

よって 第 338 項

$1012\div3=337$ あまり 1

【等差数列をなす 3 数】

6 次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ。

(1) 3，x，7，……

$x-3=7-x$
$2x=10$
$x=5$

(2) $\frac{1}{12}$，$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{6}$，……

$\frac{1}{x}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6}-\frac{1}{x}$
$12-x=2x-12$
$3x=24$
$x=8$

7 等差数列をなす 3 つの数があって，それらの和が 9，積が 15 であるという。この 3 つの数を求めよ。

3数を $a-d,\ a,\ a+d$ とおく。

和が 9 より
$(a-d)+a+(a+d)=9$
$3a=9$
$a=3$

積が 15 より
$(3-d)3(3+d)=15$
$9-d^2=5$
$d^2=4$
$d=\pm2$

$d=2$ のとき $1,\ 3,\ 5$
$d=-2$ のとき $5,\ 3,\ 1$

よって
$1,\ 3,\ 5$

【等差数列の和】

8 次の和を求めよ。

(1) 初項 10，公差 -4 の等差数列の初項から第 15 項までの和 S_{15} を求めよ。

$$S_{15}=\frac{15}{2}\{2\cdot10+(15-1)\cdot(-4)\}$$
$$=\frac{15}{2}\{20-56\}$$
$$=\underline{270}$$

(2) 初項 2，末項 10，項数 9 の等差数列の和 S_9 を求めよ。

$$S_9=\frac{9}{2}(2+10)$$
$$=\underline{54}$$

(3) 初項 1，公差 2 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$S_n=\frac{n}{2}\{2\cdot1+(n-1)\cdot2\}$$
$$=\frac{n}{2}\{2+2n-2\}$$
$$=\underline{n^2}$$

9 次の等差数列の和 S を求めよ。

(1) $\underbrace{2,\ 6,}_{4}\ \underbrace{\ ,10}_{4}$, ……, 74

$a_n=2+(n-1)d$
$=4n-2$

$4n-2=74$
$4n=76$
$n=19$

よって

$$S_{19}=\frac{19}{2}\{2+74\}$$
$$=19\cdot38$$
$$=\underline{722}$$

(2) 102, 96, 90, ……, 6
-6 -6

$a_n=102+(n-1)\cdot(-6)$
$=-6n+108$

$-6n+108=6$
$6n=102$
$n=17$

よって

$$S_{17}=\frac{17}{2}\{102+6\}$$
$$=17\cdot54$$
$$=\underline{918}$$

【等差数列の和から初項と公差を求める】

10 初項が 50，末項が 10，和が 330 である等差数列の項数 n と公差 d を求めよ。

$\frac{n}{2}(50+10)=330$
$30n=330$
$\underline{n=11}$

50, ……, 10
項数 11

$a_{11}=10$
$50+(11-1)d=10$
$10d=-40$
$\underline{d=-4}$

11 等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。初項から第 10 項までの和が 100 で，初項から第 20 項までの和が 400 であるとき，S_n を求めよ。

$\boxed{S_{10}=100}$ $\boxed{S_{20}=400}$

$S_{10}=\frac{10}{2}\{2a+9d\}=100$
$2a+9d=20$ ―①

$S_{20}=\frac{20}{2}\{2a+19d\}=400$
$2a+19d=40$ ―②

②−①
$10d=20$
$d=2$

①に代入
$2a+18=20$
$2a=2$
$a=1$

よって
$S_n=\frac{n}{2}\{2+(n-1)2\}$
$=\frac{n}{2}\{2n\}$
$=\underline{n^2}$

【倍数の和】

12 1 から 100 までの整数について，次のような数の和を求めよ。

(1) 6 の倍数

6, 12, 18, ……, 96

$a=6$, $d=6$, $n=16$ の等差数列

$100\div6=16$ … 4

$S_n=\frac{16}{2}\{12+15\cdot6\}$
$=8\cdot102$
$=\underline{816}$

(2) 6 の倍数ではない数

$\boxed{\text{すべて}-6\text{の倍数}}$

すべて
1, 2, 3, … 100
$a=1$, $d=1$, $n=100$ の等差数列

$S_{100}=\frac{100}{2}\{2+99\}$
$=5050$

よって
$5050-816=\underline{4234}$

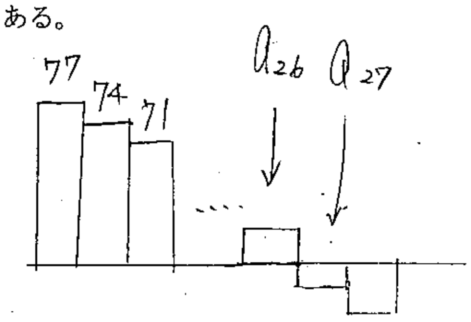
【等差数列の和の最大値】

13 初項が 77，公差が -3 である数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 第何項が初めて負の数になるか。

$a_n=77+(n-1)(-3)$
$=-3n+80<0$
$3n>80$
$n>26.6$

よって 第 27 項



(2) 初項から第何項までの和が最大であるか。また，その和を求めよ。

(1) より 初項から第 26 項

$S_{26}=\frac{26}{2}\{154+25(-3)\}$
$=13\cdot79$
$=\underline{1027}$

【等比数列の表記】

14 次のような等比数列の初項から第4項までを書け。

(1) 初項1，公比3

$a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=9$, $a_4=27$ //

(2) 初項$-\frac{1}{2}$，公比$-\frac{1}{2}$

$a_1=-\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{1}{4}$, $a_3=-\frac{1}{8}$, $a_4=\frac{1}{16}$ //

【等比数列の一般項】

15 次のような等比数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。また，第5項を求めよ。

(1) 初項2，公比3

$a_n=2\cdot3^{n-1}$ //

$a_5=2\cdot3^4=162$ //

(2) 初項1，公比-3

$a_n=(-3)^{n-1}$ //

$a_5=(-3)^4=81$ //

(3) 初項2，公比2

$a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$ //

$a_5=2^5=32$ //

(4) 初項-3，公比$\frac{1}{2}$

$a_n=-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ //

$a_5=-3\left(\frac{1}{2}\right)^4=-\frac{3}{16}$ //

16 次の等比数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(1) $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{16}$, ……

$a=\frac{3}{2}$, $r=\frac{1}{2}$

$a_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ //

(2) 5, -5, 5, -5, ……

$a=5$, $r=-1$

$a_n=5\cdot(-1)^{n-1}$ //

(3) $\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $4+3\sqrt{2}$, ……

$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$

$a=\sqrt{2}$, $r=\sqrt{2}+1$

$a_n=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^{n-1}$ //

17 次のような等比数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(1) 第2項が6，第4項が54

$\boxed{a_2=6}$ $\boxed{a_4=54}$

$a_2=ar=6$ —①

$a_4=ar^3=54$

$ar\cdot r^2=54$ —②

$6r^2=54$

$r^2=9$

$r=\pm3$

$r=3$ のとき ①に代入

$3a=6$

$a=2$

①に代入

$r=3$ のとき

$3a=6$

$a=2$

$r=-3$ のとき

$-3a=6$

$a=-2$

よって.

$a_n=2\cdot3^{n-1}$

$a_n=(-2)\cdot(-3)^{n-1}$ //

(2) 第5項が-9，第7項が-27

$\boxed{a_5=-9}$ $\boxed{a_7=-27}$

$a_5=ar^4=-9$ —①

$a_7=ar^6=-27$

$ar^4r^2=-27$ —②

①を②に代入

$-9r^2=-27$

$r^2=3$

$r=\pm\sqrt{3}$

①に代入

$r=\sqrt{3}$ のとき

$9a=-9$

$a=-1$

$r=-\sqrt{3}$ のとき

$9a=-9$

$a=-1$

よって.

$a_n=-(\sqrt{3})^{n-1}$

$a_n=-(-\sqrt{3})^{n-1}$ //

【等比数列をなす3数】

18 次の数列は等比数列である。x，yの値を求めよ。

(1) 3, x, 9, ……

$\frac{x}{3}=\frac{9}{x}$

$x^2=27$ $x=\pm3\sqrt{3}$ //

(2) x, -5, x, y, ……

① ②

①より

$\frac{-5}{x}=\frac{x}{-5}$

$x^2=25$

$x=\pm5$

②より

$\frac{x}{-5}=\frac{y}{x}$

$x^2=-5y$

$y=-\frac{x^2}{5}$

$x=5$ のとき $y=-5$

$x=-5$ のとき $y=-5$ //

19 数列24，a，bがこの順に等差数列をなし，数列a，b，8がこの順に等比数列をなすという。このとき，a，bの値を求めよ。

等差数列より

$a-24=b-a$

$2a-b=24$ —①

等比数列より

$\frac{b}{a}=\frac{8}{b}$

$b^2=8a$

$a=\frac{1}{8}b^2$ —②

②を①に代入

$2\left(\frac{1}{8}b^2\right)-b=24$

$\frac{1}{4}b^2-b-24=0$

$b^2-4b-96=0$

$(b+8)(b-12)=0$

$b=-8, 12$

①に代入

$b=-8$ のとき $a=8$

$b=12$ のとき $a=18$ //

【等比数列の和】

20 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) 2, 6, 18, 54, ……

$\times 3$ $\times 3$

$S_n = \dfrac{2(3^n-1)}{3-1} = \underline{3^n-1}$

(2) 3, −6, 12, −24, ……

-2 -2

$S_n = \dfrac{3\{1-(-2)^n\}}{1+2} = \underline{1-(-2)^n}$

(3) 12, 4, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$, ……

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$

$S_n = \dfrac{12\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{12\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{\frac{2}{3}} = \underline{18\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$

(4) 2, $2x$, $2x^2$, $2x^3$, ……

x x

$x \neq 1$ のとき

$\underline{S_n = \dfrac{2(x^n-1)}{x-1}}$

$x=1$ のとき

$\underbrace{2, 2, 2, 2 \cdots}_{n個}$

$\underline{S_n = 2n}$

21 初項が 5，公比が 2 である等比数列において，第 5 項から第 10 項までの和を求めよ。

$S_n = \dfrac{5(2^n-1)}{2-1}$

$= 5(2^n-1)$

$\boxed{S_{10}-S_4}$

$S_{10} = 5(2^{10}-1)$

$= 5115$

$S_4 = 5(2^4-1)$

$= 75$

よって

$S_{10}-S_4 = 5115-75$

$= \underline{5040}$

【等比数列の和から初項と公差を求める】

22 初項から第 3 項までの和が 7，第 3 項から第 5 項までの和が 28 となる等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

$\underbrace{a \quad ar \quad ar^2}_{7}$ $ar^3 \quad ar^4$ ($ar^2+ar^3+ar^4 = 28$)

$$\begin{cases} a+ar+ar^2 = 7 & -① \\ ar^2+ar^3+ar^4 = 28 & -② \end{cases}$$

$r^2(a+ar+ar^2) = 28$ $-②'$

②′に①を代入

$7r^2 = 28$

$r^2 = 4$

$r = \pm 2$

①に代入

$r=2$ のとき　$7a = 7$

$a = 1$

$r=-2$ のとき　$3a = 7$

$a = \frac{7}{3}$

よって

$r=2$ のとき $a=1$

$\underline{r=-2 のとき\ a=\frac{7}{3}}$

【Σ の計算】

23 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1} = 5^0+5^1+5^2+\cdots+5^{n-1}$

初 1　公比 5　項数 n　の等比数列の和

$= \dfrac{1(5^n-1)}{5-1} = \underline{\dfrac{1}{4}(5^n-1)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 3^1+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}$

初 3　公比 3　項数 $n-1$ の等比数列の和

$= \dfrac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} = \underline{\dfrac{3}{2}(3^{n-1}-1)}$

24 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-5) = 4\sum_{k=1}^{n}k - 5\sum_{k=1}^{n}$

$= 4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-5n$

$= 2n(n+1)-5n$

$= \underline{n(2n-3)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+2) = \sum_{k=1}^{n}k^2 - 3\sum_{k=1}^{n}k + 2\sum_{k=1}^{n}$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{3}{2}n(n+1) + 2n$

$= \frac{1}{6}\{n(n+1)(2n+1) - 9n(n+1) + 12n\}$

$= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) - 9(n+1) + 12\}$

$= \frac{1}{6}n\{2n^2+3n+1-9n-9+12\}$

$= \frac{1}{6}n(2n^2-6n+4)$

$= \frac{1}{3}n(n^2-3n+2) = \underline{\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k^2+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^3+k) = \sum_{k=1}^{n}k^3 + \sum_{k=1}^{n}k$

$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{4}\{n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)\}$

$= \frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2\}$

$= \underline{\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+2)}$

(4) $\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$ $= 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1}$

$= 2\cdot\frac{1}{2}n(n-1) + (n-1)$

$= n(n-1) + (n-1)$

$= \underline{(n-1)(n+1)}$ //

(5) $\sum_{k=1}^{2n}(2k+3)$ $= 2\sum_{k=1}^{2n} k + 3\sum_{k=1}^{2n}$

$= 2\cdot\frac{1}{2}2n(2n+1) + 3\cdot 2n$

$= 2n(2n+1) + 6n$

$= 2n\{(2n+1)+3\}$

$= 2n(2n+4)$

$= \underline{4n(n+2)}$ //

25 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{15}2$ $= 2\sum_{k=1}^{15}$

$= 2\cdot 15$

$= \underline{30}$ //

(2) $\sum_{k=1}^{20}k$ $= \frac{1}{2}20\cdot 21$

$= 10\cdot 21$

$= \underline{210}$ //

(3) $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+12^2$ $= \sum_{k=1}^{12} k^2$

$= \frac{1}{6}\cdot 12\cdot 13\cdot 25$

$= \underline{650}$ //

26 次の和を求めよ。

$1\cdot1+2\cdot7+3\cdot13+\cdots\cdots+n(6n-5)$

$\sum_{k=1}^{n} k(6k-5) = \sum_{k=1}^{n}(6k^2-5k)$

$= 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 5\sum_{k=1}^{n} k$

$= 6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 5\frac{1}{2}n(n+1)$

$= n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{2}\{2n(n+1)(2n+1) - 5n(n+1)\}$

$= \frac{1}{2}n(n+1)\{2(2n+1)-5\}$

$= \underline{\frac{1}{2}n(n+1)(4n-3)}$ //

27 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$1\cdot3,\ 2\cdot5,\ 3\cdot7,\ 4\cdot9,\ \cdots\cdots$ $n\cdot(2n+1)$

左 1, 2, 3, 4 …　　右 3, 5, 7, 9 …

第n項 $= n$　　初 3 公差 2 の等差数列

第n項 $= 3+(n-1)\cdot2$
$= 2n+1$

よって

$\sum_{k=1}^{n} k(2k+1) = \sum_{k=1}^{n}(2k^2+k)$

$= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$

$= 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)+3\}$

$= \underline{\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)}$ //

28 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$\underbrace{2}_{①},\ \underbrace{2+5}_{②},\ \underbrace{2+5+8}_{③},\ \underbrace{2+5+8+11}_{④},\ \cdots\cdots$　　$\underbrace{2+5+8+11\cdots}_{ⓝ}$

$2+5+8+11\ \cdots$

初 2 公差 3 項数 n の等差数列の和

第n項 $= \frac{n}{2}\{2\cdot2+(n-1)\cdot3\}$

$= \frac{n}{2}(3n+1)$

よって

$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2}(3k+1) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}k^2+\frac{k}{2}\right)$

$= \frac{3}{2}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{4}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}n(n+1)$

$= \frac{1}{4}n(n+1)\{2n+1+1\}$

$= \frac{1}{4}n(n+1)(2n+2)$

$= \frac{1}{2}n(n+1)(n+1)$

$= \underline{\frac{1}{2}n(n+1)^2}$ //

【階差数列】

29 階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $\underbrace{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ \cdots\cdots}_{}$ $\{a_n\}$
$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad \cdots$ $\{b_n\}$

$\{b_n\}$ は 初 1 公差 1 の等差数列

$b_n=n$

$n\geqq 2$ のとき

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}k$

$=1+\frac{1}{2}n(n-1)$

$=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1$

$n=1$ のとき

$a_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1$

$=1$

よって

$a_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1$ //

(2) $2,\ 3,\ 5,\ 9,\ 17,\ \cdots\cdots$ $\{a_n\}$
$1\quad 2\quad 4\quad 8\quad \cdots$ $\{b_n\}$

$\{b_n\}$ は 初 1 公比 2 の等比数列

$b_n=2^{n-1}$

$n\geqq 2$ のとき

$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}$

$=2+\boxed{2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2}}$

初 1 公比 2 項数 $n-1$ の等比数列の和

$=2+\frac{1(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$=2+2^{n-1}-1$

$=2^{n-1}+1$

$n=1$ のとき．

$a_1=2^0+1$

$=2$

よって $a_n=2^{n-1}+1$ //

【和 S_n と一般項 a_n】

30 初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $S_n=n^2-n$

$n\geqq 2$ のとき．

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-n-\{(n-1)^2-(n-1)\}$

$=n^2-n-(n^2-2n+1-n+1)$

$=n^2-n-(n^2-3n+2)$

$=2n-2$ —①

$n=1$ のとき

$a_1=S_1=1-1=0$

(①を満たす)

よって

$a_n=2n-2$ //

(2) $S_n=n^2-n+2$

$n\geqq 2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-n+2-\{(n-1)^2-(n-1)+2\}$

$=n^2-n+2-\{n^2-2n+1-n+1+2\}$

$=n^2-n+2-(n^2-3n+4)$

$=2n-2$ —①

$n=1$ のとき

$a_1=S_1=1-1+2=2$

(①を満たさない)

よって

$a_n=\begin{cases}2n-2 & (n\geqq 2)\\ 2 & (n=1)\end{cases}$ //

【部分分数分解】

31 次の和を求めよ。

$$S=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$S=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{2n+1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$ //

【(等差)×(等比)型】

32 次の和を求めよ。

$$S=1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots\cdots+n\cdot 2^{n-1}$$

$S=1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$

$-\ 2S=\quad 1\cdot 2+2\cdot 2^2+\cdots+(n-1)2^{n-1}+n\cdot 2^n$

$-S=\boxed{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}-n\cdot 2^n$

初 1 公比 2 項数 n の等比数列の和

$-S=\frac{2^n-1}{2-1}-n\cdot 2^n$

$-S=2^n-1-n\cdot 2^n$

$S=n\cdot 2^n-2^n+1$

$=(n-1)2^n+1$ //

【群数列】

33 正の奇数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする。

① ② ③ ④ ⓝ

1 | 3, 5 | 7, 9, 11 | 13, 15, 17, 19 | 21, ……

第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 4 群

$|2N-1|$

第 n 群

(1) $n\geqq 2$ のとき，第 n 群の最初の数 n の式で表せ。

何番目か．

①+②+③+④+…+ⓝ⁻¹

$1+2+3+4+\cdots+(n-1)$

初 1 公差 1 項数 $n-1$ の等差数列

$S_n=\frac{n-1}{2}\{1+n-1\}$

$=\frac{1}{2}n(n-1)$

よって

$\left(\frac{1}{2}n(n-1)+1\right)$ 番目

従って

$2\left(\frac{1}{2}n(n-1)+1\right)-1$

$=n(n-1)+2-1$

$=n^2-n+1$ //

(2) 第 15 群に入るすべての数の和 S を求めよ。

$15^2-15+1=211$

$|211,\ 213,\ \cdots\cdots|$

第 15 群

初 211 公差 2 項数 15 の等差数列

$S_{15}=\frac{15}{2}\{211\cdot 2+(15-1)\cdot 2\}$

$=\frac{15}{2}\cdot 450$

$=15\cdot 225=3375$ //

【漸化式】

1 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+3$

初 2 公差 3 の等差数列

$a_n=2+(n-1)\cdot 3$

$=3n-1$

(2) $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$

初 1 公比 2 の等比数列

$a_n=2^{n-1}$

2 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+3^n$

$n\geqq 2$ のとき

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k$

$=\boxed{1+3^1+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}}$

初 1 公比 3 項数 n の等比数列の和

$=\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}$

$=\frac{3^n-1}{2}$

$n=1$ のとき

$a_1=\frac{3-1}{2}$

$=1$

よって $a_n=\frac{3^n-1}{2}$

(2) $a_1=0$, $a_{n+1}=a_n+2n+1$

$n\geqq 2$ のとき

$a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$

$=2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}1$

$=n(n-1)+(n-1)$

$=(n-1)(n+1)$

$n=1$ のとき

$a_1=(1-1)(1+1)$

$=0$

よって

$a_n=(n-1)(n+1)$

3 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=5$, $a_{n+1}=4a_n-6$

$-\ 2=4\cdot 2-6$

$x=4x-6$

$3x=6$

$x=2$

$a_{n+1}-2=4(a_n-2)$

$b_n=a_n-2$ とおく

$b_{n+1}=4b_n$

初 $b_1=a_1-2=5-2=3$ の等比数列

公比 4

$b_n=3\cdot 4^{n-1}$

$a_n-2=3\cdot 4^{n-1}$

$a_n=3\cdot 4^{n-1}+2$

(2) $a_1=3$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$

$-\ 2=\frac{1}{2}\cdot 2+1$

$x=\frac{1}{2}x+1$

$\frac{1}{2}x=1$

$x=2$

$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$

$b_n=a_n-2$ とおくと

$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$

初 $b_1=a_1-2=3-2=1$ の等比数列

公比 $\frac{1}{2}$

$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n-2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$

【3 項間漸化式】

4 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=0$, $a_2=1$, $a_{n+2}-7a_{n+1}+10a_n=0$

$x^2-7x+10=0$

$(x-5)(x-2)=0$

$x=2,\ 5$

$a_{n+2}-2a_{n+1}=5(a_{n+1}-2a_n)$

初 $a_2-2a_1=1-0=1$ の等比数列

公比 5

$a_{n+1}-2a_n=5^{n-1}$ — ①

$a_{n+2}-5a_{n+1}=2(a_{n+1}-5a_n)$

初 $a_2-5a_1=1-0=1$ の等比数列

公比 2

$a_{n+1}-5a_n=2^{n-1}$ — ②

① − ②

$3a_n=5^{n-1}-2^{n-1}$

$a_n=\frac{5^{n-1}-2^{n-1}}{3}$

【数学的帰納法】

5 数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ。

(1) $1+3+5+\cdots\cdots+(2n+1)=n^2$ ——①

[1] $n=1$ のとき

(左辺) $= 2-1=1$

(右辺) $= 1^2=1$

よって，$n=1$ のとき ①は成り立つ

[2] $n=k$ のとき

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

が成り立つと仮定する

$n=k+1$ のとき

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\{2(k+1)-1\}=(k+1)^2$

を示す．

(左辺) $= k^2+\{2(k+1)-1\}$

$= k^2+2k+1$

$= (k+1)^2$

$=$ (右辺)

よって，$n=k+1$ のとき ①は成り立つ．

[1][2] より ①は成り立つ

(2) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ ——①

[1] $n=1$ のとき

(左辺) $= 1(1+1)=2$

(右辺) $= \frac{1}{3}1(1+1)(1+2)=2$

よって，$n=1$ のとき ①は成り立つ

[2] $n=k$ のとき

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

が成り立つと仮定する

$n=k+1$ のとき

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$

$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$ を示す

(左辺) $= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$

$= \frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)\}$

$= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)\{k+3\}$

よって，$n=k+1$ のとき ①は成り立つ

[1][2] より ①は成り立つ

6 n を3以上の自然数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$2^n>2n+1$ ——①

[1] $n=3$ のとき．

(左辺) $= 2^3=8$

(右辺) $= 6+1=7$

よって $n=3$ のとき ①は成り立つ

[2] $n=k$ のとき $(k\geqq4)$

$2^k>2k+1$

が成り立つと仮定する

$n=k+1$ のとき

$2^{k+1}>2(k+1)+1$ を示す

(左辺)$-$(右辺) $= 2^{k+1}-2(k+1)-1$

$= 2\cdot2^k-2k-3$

$> 2(2k+1)-2k-3$

$= 4k+2-2k-3$

$= 2k-1>0$

よって，$n=k+1$ のとき ①は成り立つ

[1][2] より ①は成り立つ

7 すべての自然数 n について，7^n-1 は6の倍数である。このことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。 ——①

[1] $n=1$ のとき

$7-1=6$

よって，$n=1$ のとき ①は成り立つ．

[2] $n=k$ のとき

7^k-1 が 6の倍数であると仮定する．

$7^k-1=6N$ (N：整数) とおける．

$n=k+1$ のとき

$7^{k+1}-1$ が 6の倍数であることを示す．

$7^{k+1}-1 = 7\cdot7^k-1$

$= 7\cdot7^k-7+6$

$= 7(7^k-1)+6$

$= 7\cdot6N+6$

$= 6(7N+1)$

よって $n=k+1$ のとき ①は成り立つ．

[1][2] より ①は成り立つ