

積分①

【不定積分[1]】

1 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (x^3 - 6x^2 - 2x + 5) dx = \frac{1}{4} x^4 - 2x^3 - x^2 + 5x + C //$$

$$(2) \int (x+1)(x-3) dx = \int (x^2 - 2x - 3) dx \\ = \frac{1}{3} x^3 - x^2 - 3x + C //$$

$$(3) \int 3(t-1)^2 dt = \int 3(t^2 - 2t + 1) dt \\ = \int (3t^2 - 6t + 3) dt \\ = t^3 - 3t^2 + 3t + C //$$

【不定積分の関数の決定】

2 次の2つの条件をともに満たす関数  $F(x)$  を求めよ。

1]  $F'(x) = 3x^2 - 4$       2]  $F(1) = 2$

$$F(x) = \int (3x^2 - 4) dx \quad F(1) = 2 \neq \text{?}$$

$$F(x) = x^3 - 4x + C \\ F(1) = 1 - 4 + C \\ = -3 + C \\ -3 + C = 2 \\ C = 5$$

よって  $F(x) = x^3 - 4x + 5 //$

【定積分の値[1]】

3 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^2 5 dx \\ = 5 \int_0^2 1 dx \\ = 5 [x]_0^2 \\ = 5(2 - 0) \\ = 10 //$$

$$(2) \int_0^2 (x^2 + 4x - 5) dx \\ = \left[ \frac{1}{3} x^3 + 2x^2 - 5x \right]_0^2 \\ = \left( \frac{8}{3} + 8 - 10 \right) - 0 \\ = \frac{8}{3} - 2 \\ = \frac{2}{3} //$$

$$(3) \int_2^3 (x-2)(x-3) dx \\ = \int_2^3 (x^2 - 5x + 6) dx \\ = \left[ \frac{1}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 6x \right]_2^3 \\ = \left( 9 - \frac{45}{2} + 18 \right) - \left( \frac{8}{3} - 10 + 12 \right) \\ = \left( 27 - \frac{45}{2} \right) - \left( \frac{8}{3} + 2 \right) \\ = \frac{9}{2} - \frac{14}{3} = \frac{27}{6} - \frac{28}{6} = -\frac{1}{6} //$$

$$(4) \int_{-2}^2 x(x+2)^2 dx \\ = \int_{-2}^2 x(x^2 + 4x + 4) dx \\ = \int_{-2}^2 (x^3 + 4x^2 + 4x) dx \\ = \int_{-2}^2 4x^2 dx \\ - 4 \int_{-2}^2 x dx \\ = 8 \int_0^2 x^2 dx \\ = \frac{8}{3} [x^3]_0^2 = \frac{64}{3} //$$

【定積分の値[2]】

4 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_{-1}^1 (x+2)^2 dx - \int_{-1}^1 (x-2)^2 dx \\ = \int_{-1}^1 \{ (x+2)^2 - (x-2)^2 \} dx \\ = \int_{-1}^1 \{ x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 4x + 4) \} dx \\ = \int_{-1}^1 8x dx \\ = 8 \int_{-1}^1 x dx \\ = 0 //$$

$$(2) \int_{-1}^2 (x^2 - x) dx - \int_2^3 (x^2 - x) dx \\ = \int_{-1}^2 (x^2 - x) dx + \int_2^3 (x^2 - x) dx \\ = \int_{-1}^3 (x^2 - x) dx \\ = \left[ \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^3 \\ = \left( 9 - \frac{9}{2} \right) - \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \\ = \frac{9}{2} + \frac{5}{6} \\ = \frac{27}{6} + \frac{5}{6} \\ = \frac{32}{6} \\ = \frac{16}{3} //$$

積分②

【定積分を含む関数】

5 次の等式を満たす関数  $f(x)$  を求めよ。

$$f(x) = 3x^2 + \int_{-1}^1 f(t) dt$$

$$a = \int_{-1}^1 f(t) dt \quad \text{と置く}$$

$$f(x) = 3x^2 + a$$

$$f(t) = 3t^2 + a$$

$$a = \int_{-1}^1 f(t) dt$$

$$= \int_{-1}^1 (3t^2 + a) dt$$

$$= \left[ t^3 + at \right]_{-1}^1$$

$$= (1+a) - (-1-a)$$

$$= 2a + 2$$

$$a = 2a + 2$$

$$a = -2$$

$$f > 2$$

$$f(x) = 3x^2 - 2$$

【 $\int_a^x t$  の式  $dt$  の導関数】

6  $x$  の関数  $\int_0^x (3t^2 - 2t - 1) dt$  の導関数を求めよ。

$$3x^2 - 2x - 1$$

【定積分と関数の決定】

7 次の等式を満たす関数  $f(x)$  と定数  $a$  の値を求めよ。

$$\int_a^x f(t) dt = x^2 - x - 2 \quad \text{--- ①}$$

$$f(x) = 2x - 1$$

$$\text{① } \tau \quad x - a \text{ とおくと}$$

$$0 = a^2 - a - 2$$

$$(a-2)(a+1) = 0$$

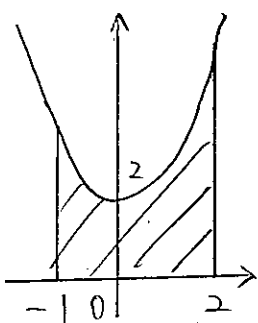
$$a = -1, 2$$

【曲線と  $x$  軸で囲まれた部分の面積[1]】

8 次の放物線と2直線および  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

(1) 放物線  $y = x^2 + 2$ , 2直線  $x = -1, x = 2$

頂  $(0, 2)$



$$\int_{-1}^2 (x^2 + 2) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_{-1}^2$$

$$= \left( \frac{8}{3} + 4 \right) - \left( -\frac{1}{3} - 2 \right)$$

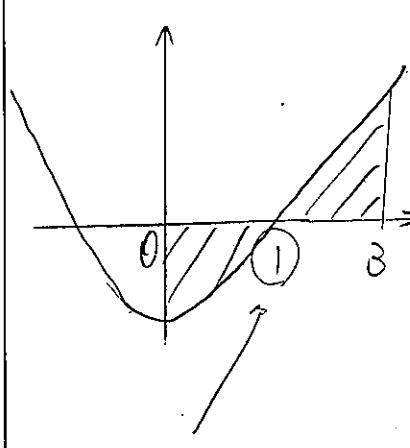
$$= \frac{20}{3} + \frac{7}{3}$$

$$= \frac{27}{3}$$

$$= 9$$

(2) 放物線  $y = x^2 - 1$ , 2直線  $x = 0, x = 3$

頂  $(0, -1)$



$$0 = x^2 - 1$$

$$(x+1)(x-1) = 0$$

$$x = -1, 1$$

$$-\int_0^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 + \left[ \frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^3$$

$$= \left( -\frac{1}{3} + 1 \right) - 0 + (9 - 3) - \left( \frac{1}{3} - 1 \right)$$

$$= \frac{2}{3} + 6 + \frac{2}{3}$$

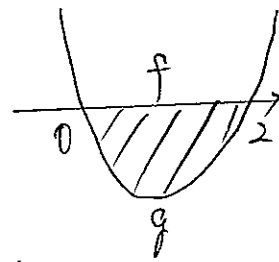
$$= \frac{4}{3} + 6$$

$$= \frac{22}{3}$$

【曲線と  $x$  軸で囲まれた部分の面積[2]】

9 次の放物線と  $x$  軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)  $y = x^2 - 2x$



$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0, 2$$

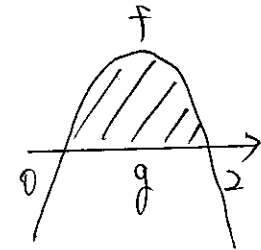
$f-g$   
①

$$\int_0^2 -1 \cdot x(x-2) dx$$

$$= \frac{1(2-0)^3}{6}$$

$$= \frac{4}{3}$$

(2)  $y = -2x^2 + 4x$



$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0, 2$$

$f-g$   
②

$$\int_0^2 -2x(x-2) dx$$

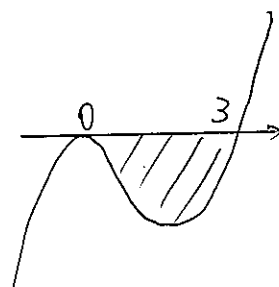
$$= \frac{2(2-0)^3}{6}$$

$$= \frac{8}{3}$$

(3)  $y = x^2(x-3)$

$$x^2(x-3) = 0$$

$$x = 0 \text{ (重解)}, 3$$



$$-\int_0^3 x^2(x-3) dx$$

$$= -\int_0^3 (x^3 - 3x^2) dx$$

$$= \int_0^3 (-x^3 + 3x^2) dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_0^3$$

$$= -\frac{81}{4} + 27 - 0$$

$$= -\frac{81}{4} + \frac{108}{4}$$

$$= \frac{27}{4}$$

積分③

【2曲線で囲まれた面積[1]】

10 次の放物線と2直線  $x=1$ ,  $x=2$  で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

(1)  $y=x^2-5x$ ,  $y=-x^2+4x$

$x=1$	-4	3
$x=2$	-6	4

$$\int_1^2 \{(-x^2+4x) - (x^2-5x)\} dx$$

$$= \int_1^2 (-2x^2+9x) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_1^2$$

$$= \left(-\frac{16}{3} + 18\right) - \left(-\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\right)$$

$$= \frac{38}{3} - \frac{23}{6}$$

$$= \frac{76}{6} - \frac{23}{6}$$

$$= \frac{53}{6}$$

(2)  $y=x^2-2x+4$ ,  $y=2x^2-4x+3$

$x=1$	3	1
$x=2$	4	3

$$\int_1^2 \{(x^2-2x+4) - (2x^2-4x+3)\} dx$$

$$= \int_1^2 (-x^2+2x+1) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_1^2$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 4 + 2\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 + 1\right)$$

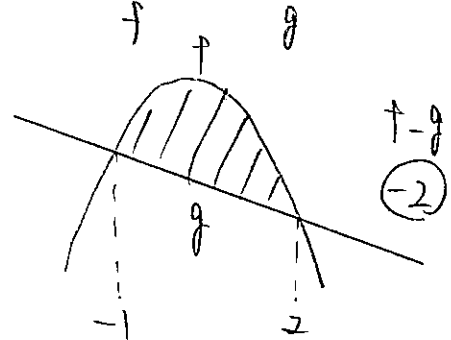
$$= \frac{10}{3} - \frac{5}{3}$$

$$= \frac{5}{3}$$

【2曲線で囲まれた面積[2]】

11 次の放物線と直線で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

(1)  $y=-2x^2+4$ ,  $y=-2x$



$$\int_{-1}^2 -2(x-2)(x+1) dx$$

$$= \frac{2(2+1)^3}{6}$$

$$= 9$$

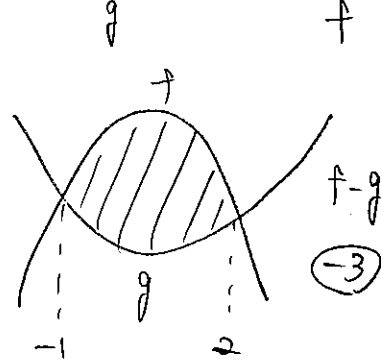
$$-2x^2+4 = -2x$$

$$2x^2-2x-4=0$$

$$(x-2)(x+1)=0$$

$$x = -1, 2$$

(2)  $y=x^2+x-2$ ,  $y=-2x^2+4x+4$



$$\int_{-1}^2 -2(x-2)(x+1) dx$$

$$= \frac{2(2+1)^3}{6}$$

$$= 9$$

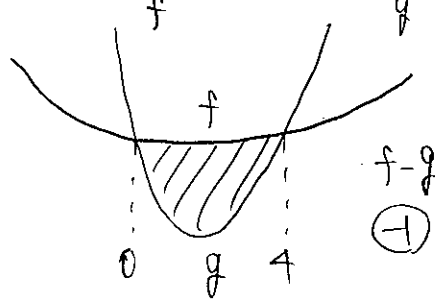
$$x^2+x-2 = -2x^2+4x+4$$

$$3x^2-3x-6=0$$

$$(x-2)(x+1)=0$$

$$x = -1, 2$$

(3)  $y=x^2+x+1$ ,  $y=2x^2-3x+1$



$$\int_0^4 -1x(x-4) dx$$

$$= \frac{1(4-0)^3}{6}$$

$$x^2+x+1 = 2x^2-3x+1$$

$$= \frac{32}{3}$$

$$x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0$$

$$x = 0, 4$$

【3次関数のグラフとx軸で囲まれた部分の面積】

12 次の曲線とx軸で囲まれた2つの部分の面積の和  $S$  を求めよ。

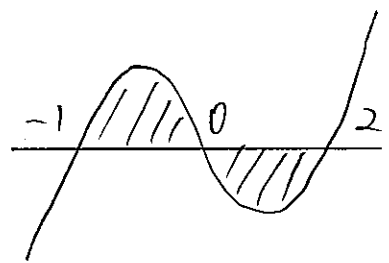
$$y=x^3-x^2-2x$$

$$x^3-x^2-2x=0$$

$$x(x^2-x-2)=0$$

$$x(x-2)(x+1)=0$$

$$x = -1, 0, 2$$



$$\int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x) dx - \int_0^2 (x^3-x^2-2x) dx$$

$$= \int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x) dx + \int_0^2 (-x^3+x^2+2x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^2$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) + \left(-4 + \frac{8}{3} + 4\right) - 0$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{32}{12}$$

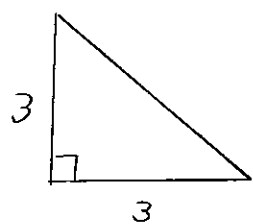
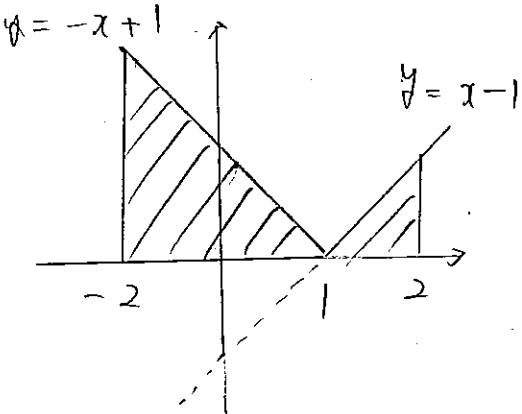
$$= \frac{37}{12}$$

積分④

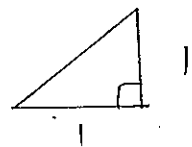
【絶対値を含む関数の定積分】

13 次の定積分を求めよ。

(1)  $\int_{-2}^2 |x-1| dx$



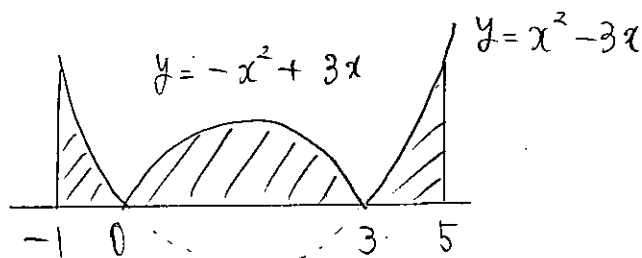
$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$$



$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

よって  $\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$

(2)  $\int_{-1}^5 |x(x-3)| dx$



$$\int_{-1}^0 (x^2-3x) dx + \int_0^3 (-x^2+3x) dx + \int_3^5 (x^2-3x) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 + \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_3^5$$

$$= 0 - \left( -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) + \left( -9 + \frac{27}{2} \right) - 0 + \left( \frac{125}{3} - \frac{75}{2} \right) - \left( 9 - \frac{27}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 9 + \frac{27}{2} + \frac{125}{3} - \frac{75}{2} - 9 + \frac{27}{2}$$

$$= 42 - 9 - 18$$

$$= 15$$

【3次関数のグラフと接線で囲まれた部分の面積】

14 曲線  $y = x^3 + x^2 - 2x$  上に点 A(1, 0) をとる。

(1) 点 A における接線  $l$  の方程式を求めよ。

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$$

$$f'(1) = 3 + 2 - 2$$

$$= 3$$

よって

$$y - 0 = 3(x - 1)$$

$$y = 3x - 3$$

(2) 曲線  $y = x^3 + x^2 - 2x$  と接線  $l$  で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

$$x^3 + x^2 - 2x = 3x - 3$$

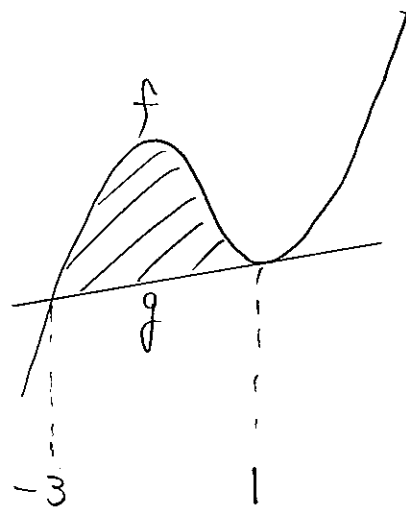
$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x^2+2x-3) = 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad -5 \quad 3 \\ \underline{1 \quad 2 \quad -3 \quad 0} \end{array}$$

$$(x-1)(x+3)(x-1) = 0$$

$$x = -3, 1 \text{ (重解)}$$



$$\int_{-3}^1 \{ (x^3 + x^2 - 2x) - (3x - 3) \} dx$$

$$= \int_{-3}^1 (x^3 + x^2 - 5x + 3) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x \right]_{-3}^1$$

$$= \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 3 \right) - \left( \frac{81}{4} - 9 - \frac{45}{2} - 9 \right)$$

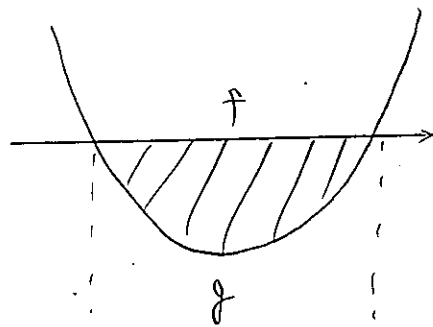
$$= -\frac{80}{4} + \frac{1}{3} + \frac{40}{2} + 21$$

$$= -20 + 20 + 21 + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{64}{3}$$

【 $\int_a^{\beta} -a(x-\alpha)(x-\beta) dx = \frac{a(\beta-\alpha)^3}{6}$  の公式】

15 放物線  $y = x^2 - 4x + 1$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。



$$2 - \sqrt{3} \quad \parallel \quad \alpha$$

$$2 + \sqrt{3} \quad \parallel \quad \beta$$

$$f - g$$

$$\beta - \alpha$$

$$= 2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})$$

$$= 2\sqrt{3}$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} -1(x-\alpha)(x-\beta) dx$$

$$= \frac{1(\beta-\alpha)^3}{6}$$

$$= \frac{(2\sqrt{3})^3}{6}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{1} = 4\sqrt{3}$$