

式と証明①

【3次式の展開[1]】

① 次の式を展開せよ。

$$(1) (x+2)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 4 + 8$$

$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$(2) (3a+b)^3 = 27a^3 + 3 \cdot (3a)^2 \cdot b + 3 \cdot (3a) \cdot b^2 + b^3$$

$$= 27a^3 + 27a^2b + 9ab^2 + b^3$$

$$(3) (x-2y)^3 = x^3 + 3x^2(-2y) + 3x(-2y)^2 + (-2y)^3$$

$$= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$$

【3次式の展開[2]】

② 次の式を展開せよ。

$$(1) (x+2)(x^2-2x+4) = x^3 + 8$$

$$(2) (2x-a)(4x^2+2ax+a^2) = (2x)^3 - a^3$$

$$= 8x^3 - a^3$$

【3次式の因数分解】

③ 次の式を因数分解せよ。

$$(1) x^3+64 = (x+4)(x^2-4x+16) \quad x^2-8x+16$$

$$(2) 125x^3-y^3 = (5x-y)(25x^2+5xy+y^2)$$

$$= 25x^2-10xy+y^2$$

【3次式の因数分解】

④ 次の式を因数分解せよ。

$$(1) x^6-1 = (x^3)^2 - 1^2 \quad x^2-2x+1$$

$$= (x^3-1)(x^3+1) \quad x^2+2x+1$$

$$= (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$$

$$(2) a^6-64b^6 = (a^3)^2 - (8b^3)^2 \quad a^2-4ab+4b^2$$

$$= (a^3-8b^3)(a^3+8b^3) \quad a^2+4ab+4b^2$$

$$= (a-2b)(a^2+2ab+b^2)(a+2b)(a^2-2ab+b^2)$$

【二項定理[1]】

⑤ 次の展開式を、二項定理を使って求めよ。

$$(1) (x+1)^4 = {}_4C_0 x^4 + {}_4C_1 x^3 + {}_4C_2 x^2 + {}_4C_3 x + {}_4C_4$$

$$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$(2) (x-2)^6 = {}_6C_0 x^6 - {}_6C_1 x^5(-2) + {}_6C_2 x^4(-2)^2 + {}_6C_3 x^3(-2)^3$$

$$+ {}_6C_4 x^2(-2)^4 + {}_6C_5 x(-2)^5 + {}_6C_6 (-2)^6$$

$$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$$

【二項定理[2]】

⑥ 次の展開式において、[] 内に指定された項の係数を求めよ。

$$(1) (2x+3)^4 \quad [x^3]$$

$${}_4C_1 (2x)^3 \cdot 3 = 96x$$

$$\therefore \underline{96}$$

$$(2) (x-2y)^5 \quad [x^2y^3]$$

$${}_5C_2 x^2(-2y)^3 = -80x^2y^3$$

$$\therefore \underline{-80}$$

【(a+b+c)^n の展開】

⑦ (a+b-2c)^7 の展開式における a^2b^2c^3 の項の係数を求めよ。

$$\frac{7!}{2!2!3!} a^2 b^2 (-2c)^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-8)}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} a^2 b^2 c^3$$

$$= \underline{-1680}$$

【整式の除法】

⑧ 次の整式 A, B について、A を B で割った商と余りを求めよ。

(1) A=2x^3+5x^2-2x+4, B=x^2-x+2

$$\begin{array}{r} 2x+7 \\ x^2-x+2 \overline{) 2x^3+5x^2-2x+4} \\ \underline{2x^3-2x^2+4x} \\ 7x^2-6x+4 \\ \underline{7x^2-7x+14} \\ x-10 \end{array}$$

商 2x+7
余り x-10

(2) A=x^3-7x+6, B=x^2-3+2x

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x^2+2x-3 \overline{) x^3-7x+6} \\ \underline{x^3+2x^2-3x} \\ -2x^2-4x+6 \\ \underline{-2x^2-4x+6} \\ 0 \end{array}$$

商 x-2
余り 0

【文字を含む整式の除法】

⑨ A=6x^2-11ax-10a^2, B=3x+2a を、x についての整式とみて、A を B で割った商と余りを求めよ。

$$\begin{array}{r} 2x-5a \\ 3x+2a \overline{) 6x^2-11ax-10a^2} \\ \underline{6x^2+4ax} \\ -15ax-10a^2 \\ \underline{-15ax-10a^2} \\ 0 \end{array}$$

商 2x-5a
余り 0

式と証明②

【整式の商と余り】

10 整式 x^3+4x^2+4x-2 を整式 B で割ると、商が $x+3$ 、余りが $2x+1$ であるという。
 B を求めよ。

$$\begin{aligned} x^3+4x^2+4x-2 &= B(x+3)+2x+1 \\ B(x+3)+2x+1 &= x^3+4x^2+4x-2 \\ B(x+3) &= x^3+4x^2+2x-3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x^2+x-1 \\ x+3 \overline{) x^3+4x^2+2x-3} \\ \underline{x^3+3x^2} \\ x^2+2x \\ \underline{x^2+3x} \\ -x-3 \\ \underline{-x-3} \\ 0 \end{array}$$

$B = x^2+x-1$

【分数式の約分】

11 次の分数式を約分して、既約分数式で表せ。

(1) $\frac{15ab^4}{6a^3b^2} = \frac{5b^2}{2a^2}$

(2) $\frac{x^2-2x-3}{2x^2-7x+3} = \frac{(x-3)(x+3)}{(2x-1)(x-3)}$
 $= \frac{x+3}{2x-1}$

【分数式の積・商】

12 次の計算をせよ。

(1) $\frac{2x}{2x+1} \times \frac{2x^2-3x-2}{x-2} = \frac{2x}{2x+1} \times \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2}$
 $= \frac{2x}{1}$

(2) $\frac{x-2}{x^2+3x} \div \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{x-2}{x(x+3)} \times \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}$
 $= \frac{x-2}{x^2}$

【分数式の和・差[1]】

13 次の計算をせよ。

(1) $\frac{2x}{x+3} + \frac{x+9}{x+3} = \frac{3x+9}{x+3} = \frac{3(x+3)}{x+3} = 3$

(2) $\frac{3x+1}{x-2} - \frac{2x-3}{x-2} = \frac{3x+1-(2x-3)}{x-2} = \frac{x+4}{x-2}$

(3) $\frac{2x^2}{x-1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{2x^2-(x+1)}{x-1} = \frac{(2x+1)(x-1)}{x-1}$
 $= \frac{2x^2-x-1}{x-1} = \frac{2x+1}{1}$

【分数式の和・差[2]】

14 次の計算をせよ。

(1) $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)} + \frac{3(x+1)}{(x+1)(x-2)}$
 $= \frac{2x-4+3x+3}{(x+1)(x-2)} = \frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$

(2) $\frac{x}{x+1} + \frac{3x-1}{x^2-2x-3} = \frac{x}{x+1} + \frac{3x-1}{(x-3)(x+1)}$
 $= \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+1)} + \frac{3x-1}{(x-3)(x+1)}$
 $= \frac{x^2-1}{(x-3)(x+1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x-1}{x-3}$

(3) $\frac{3x+5}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x} = \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{x(x+1)}$
 $= \frac{x(3x+5)}{x(x+1)(x-1)} - \frac{x-1}{x(x+1)(x-1)}$
 $= \frac{3x^2+5x-(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$
 $= \frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-1)}$
 $= \frac{(3x+1)(x+1)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{3x+1}{x(x-1)}$

【素分数式】

次の式を簡単にせよ。

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}} = \frac{1}{1-\frac{x}{x-1}} = \frac{1}{\frac{x-1-x}{x-1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{-1}{x-1}} = \frac{x-1}{-1} = \frac{1-x}{1}$$

【恒等式の係数決定】

16 等式 $2x^2 - 7x + 8 = (x-3)(ax+b) + c$ が x についての恒等式であるとき、定数 a, b, c の値を求めよ。

$$2x^2 - 7x + 8 = ax^2 - 3ax + bx - 3b + c$$

$$= 0x^2 + (b-3a)x - 3b + c$$

$$\begin{cases} 2 = 0 & \text{--- ①} \\ -7 = b - 3a & \text{--- ②} \\ 8 = -3b + c & \text{--- ③} \end{cases}$$

① と ② を代し

$$b = -1$$

③ を代し

よって

$$c = 5 \quad \underline{a = 2, b = -1, c = 5}$$

【分数式の恒等式】

17 等式 $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ が x についての恒等式となるように、定数 a, b の値を求めよ。

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} \quad \begin{cases} a + b = 0 & \text{--- ①} \\ a - 1 = 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

両辺 $\times x(x+1)$

①② より

$$1 = (x+1)a + bx$$

$$ax + a + bx - 1 = 0$$

$$(a+b)x + (a-1) = 0$$

$$\underline{a = 1, b = -1}$$

【等式の証明】

18 次の等式を証明せよ。

(1) $a^3 + b^3 = (a-b)^3 - 3ab(a-b)$

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2 \\ &= a^3 + b^3 \\ &= \text{(左辺)} \end{aligned}$$

よって (左辺) = (右辺)

(2) $(a^2+1)(b^2+1) = (ab+1)^2 + (a-b)^2$

$$\text{(左辺)} = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1$$

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= a^2b^2 + 2ab + 1 + a^2 - 2ab + b^2 \\ &= a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \end{aligned}$$

よって (左辺) = (右辺)

【条件付きの等式の証明】

19 次の等式が成り立つことを示せ。

(1) $a+b+c=0$ のとき、 $a^2+ca=b^2+bc$

$$c = -a - b \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= a^2 + a(-a-b) \\ &= a^2 - a^2 - ab \\ &= -ab \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{(右辺)} &= b^2 + b(-a-b) \\ &= b^2 - ab - b^2 \\ &= -ab \end{aligned}$$

よって (左辺) = (右辺)

(2) $a+b+c=0$ のとき、 $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 3abc = 0$

$$a+b = -c$$

$$b+c = -a$$

$$c+a = -b \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= ab(-c) + bc(-a) + ca(-b) + 3abc \\ &= 0 \\ &= \text{(右辺)} \end{aligned}$$

よって (左辺) = (右辺)

【比例式】

20 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき、次の等式を証明せよ。

(1) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{2a-3c}{2b-3d}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{k}{1} \text{ とおく}$$

$$a = bk$$

$$d = ck$$

$$\text{(左辺)} = \frac{bk + ck}{b + d}$$

$$= \frac{k(b+d)}{b+d}$$

$$= k$$

$$\text{(右辺)} = \frac{2bk - 3ck}{2b - 3d}$$

$$= \frac{k(2b - 3d)}{2b - 3d}$$

$$= k$$

よって (左辺) = (右辺)

(2) $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{a^2}{b^2}$

$$\text{(左辺)} = \frac{b^2 \frac{a^2}{b^2} + d^2 \frac{a^2}{b^2}}{b^2 + d^2}$$

$$= \frac{\frac{a^2}{b^2}(b^2 + d^2)}{b^2 + d^2}$$

$$= \frac{a^2}{b^2}$$

$$\text{(右辺)} = \frac{b^2 \frac{a^2}{b^2}}{b^2}$$

$$= \frac{a^2}{b^2}$$

よって (左辺) = (右辺)

式と証明④

【条件付きの不等式の証明】

21 次の不等式を証明せよ。

(1) $x > y$ のとき, $3x - 4y > x - 2y$

$$x - y > 0 \quad \text{--- ①}$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= (3x - 4y) - (x - 2y) \\ &= 2x - 2y \\ &= 2(x - y) > 0 \quad (\text{①より}) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{---} 2 \quad (\text{左辺}) > (\text{右辺})$$

(2) $x > 2, y > 3$ のとき, $xy + 6 > 3x + 2y$

$$x - 2 > 0, \quad y - 3 > 0 \quad \text{--- ①}$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= (xy + 6) - (3x + 2y) \\ &= xy - 3x - 2y + 6 \\ &= x(y - 3) - 2(y - 3) \\ &= (y - 3)(x - 2) > 0 \quad (\text{①より}) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{---} 2 \quad (\text{左辺}) > (\text{右辺})$$

【不等式の証明】

22 次の不等式を証明せよ。また, (1), (3) は等号が成り立つときを調べよ。

(1) $(a+b)^2 \geq 4ab$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= (a+b)^2 - 4ab \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \\ &= (a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{---} 2 \quad (\text{左辺}) \geq (\text{右辺})$$

等号成立は $a - b = 0$
 $a = b$ のとき

(2) $x^2 + y^2 \geq 2(x+y-1)$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= x^2 + y^2 - 2(x+y-1) \\ &= x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \\ &= (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{---} 2 \quad (\text{左辺}) \geq (\text{右辺})$$

等号成立は $x-1=0$ かつ $y-1=0$
 $x=1$ かつ $y=1$ のとき

(3) $a^2 + b^2 \geq ab$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= a^2 + b^2 - ab \\ &= a^2 - ba + b^2 \\ &= \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 - \frac{1}{4}b^2 + b^2 \\ &= \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{---} 2 \quad (\text{左辺}) \geq (\text{右辺})$$

等号成立は $a - \frac{1}{2}b = 0$ かつ $b = 0$
 $a = 0$ かつ $b = 0$ のとき

【 $\sqrt{\quad}$ を含む不等式の証明】

23 $x > 0$ のとき, 次の不等式を証明せよ。

$$1+x > \sqrt{1+2x}$$

$$(\text{左辺}) > 0, \quad (\text{右辺}) > 0 \quad \text{---} \text{イ}$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 &= (1+x)^2 - (1+2x) \\ &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 2x \\ &= x^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{---} 2 \quad (\text{左辺}) > (\text{右辺})$$

【絶対値を含む不等式の証明】

24 次の不等式を証明せよ。また, 等号が成り立つときを調べよ。

$$|a| + |b| \geq |a-b|$$

$$(\text{左辺}) > 0, \quad (\text{右辺}) > 0 \quad \text{---} \text{イ}$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 &= (|a| + |b|)^2 - (a-b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{---} 2 \quad (\text{左辺}) \geq (\text{右辺})$$

等号成立は $|ab| = ab$ $ab \geq 0$ のとき

【相加平均と相乗平均】

25 $a > 0, b > 0$ のとき, 次の不等式を証明せよ。また, 等号が成り立つときを調べよ。

(1) $a + \frac{4}{a} \geq 4$

$$a > 0, \quad \frac{4}{a} > 0$$

相加・相乗平均より

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} \\ &= 2\sqrt{4} \\ &= 4 \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

等号成立は

$$a = \frac{4}{a}$$

$$a^2 = 4$$

$$a = 2 \quad \text{のとき}$$

$$\textcircled{a \neq -2}$$

(2) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

$$\frac{a}{b} > 0, \quad \frac{b}{a} > 0$$

相加・相乗平均より

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} \\ &= 2 \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

等号成立は

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$$

$$a^2 = b^2$$

$$a^2 - b^2 = 0$$

$$(a+b)(a-b) = 0$$

$$a = b \quad \text{のとき}$$

$$\textcircled{a \neq -b}$$

(3) $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right) \geq 16$

$$(\text{左辺}) = ab + \frac{9}{ab} + 10$$

$$ab > 0, \quad \frac{9}{ab} > 0$$

相加・相乗平均より

$$\begin{aligned} &\geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{9}{ab}} + 10 \\ &= 2\sqrt{9} + 10 \\ &= 16 \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

等号成立は

$$ab = \frac{9}{ab}$$

$$(ab)^2 = 9$$

$$ab = 3 \quad \text{のとき}$$

$$\textcircled{ab \neq -3}$$