# 複素数と方程式①

**【複素数の計算（加法･減法･乗法）】**

1 次の計算をせよ。

(1) $(-1+2i)+(3-4i)$

$= \underline{2-2i}$

(2) $(2-3i)-(4-2i)$

$= 2-3i-4+2i$

$= \underline{-2-i}$

(3) $(3+2i)(4-2i)$

$= 12+2i-4i^2$

$= \underline{16+2i}$

(4) $(2+3i)^2$

$= 4+12i+9i^2$

$= \underline{-5+12i}$

**【複素数の除法】**

2 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{2}{1-i} = \dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2+2i}{1^2-i^2} = \dfrac{2+2i}{2} = \underline{1+i}$

(2) $\dfrac{-4+2i}{2i} = \dfrac{(-4+2i)i}{2i^2} = \dfrac{-4i-2}{-2} = \underline{1+2i}$

(3) $\dfrac{5-3i}{1+5i} = \dfrac{(5-3i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)} = \dfrac{5-28i+15i^2}{1-25i^2}$

$= \dfrac{-10-28i}{26}$

$= \underline{\dfrac{-5-14i}{13}}$

(4) $\dfrac{1+2i}{3+2i}+\dfrac{2+i}{3-2i} = \dfrac{(1+2i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} + \dfrac{(2+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}$

$= \dfrac{3+4i-4i^2}{9-4i^2} + \dfrac{6+7i+2i^2}{9-4i^2}$

$= \dfrac{7+4i}{13} + \dfrac{4+7i}{13}$

$= \underline{\dfrac{11+11i}{13}}$

**【複素数の相等】**

3 次のような実数 $x$, $y$ を求めよ。

(1) $(x-3)+(x+y)i=0$

$\begin{cases} x-3=0 & \text{—①} \\ x+y=0 & \text{—②} \end{cases}$

①②より

$\underline{x=3,\ y=-3}$

(2) $(x+yi)(2-i)=4-7i$

$2x-xi+2yi-yi^2=4-7i$

$2x+y-xi+2yi=4-7i$

$(2x+y)+(-x+2y)i=4-7i$

$\begin{cases} 2x+y=4 & \text{—①} \\ -x+2y=-7 & \text{—②} \end{cases}$

$y=4-2x$ —①′

①′を②に代入

$x=3$

①′に代入

$y=-2$

よって $\underline{x=3,\ y=-2}$

**【負の数の平方根[1]】**

4 次の問いに答えよ。

(1) $-18$ の平方根を $i$ を用いて表せ。

$x^2=-18$

$x=\pm\sqrt{-18}=\pm\sqrt{18}\,i=\underline{\pm3\sqrt{2}\,i}$

(2) 2 次方程式 $x^2=-8$ を解け。

$x^2=-8$

$x=\pm\sqrt{-8}=\pm\sqrt{8}\,i=\underline{\pm2\sqrt{2}\,i}$

**【負の数の平方根[2]】**

5 次の数を $i$ を用いて表せ。

(1) $\sqrt{-2}-\sqrt{-8}$

$= \sqrt{2}\,i-\sqrt{8}\,i$

$= \sqrt{2}\,i-2\sqrt{2}\,i$

$= \underline{-\sqrt{2}\,i}$

(2) $\sqrt{-12}\sqrt{-6}$

$= 2\sqrt{3}\,i\sqrt{6}\,i$

$= 2\sqrt{18}\,i^2$

$= \underline{-6\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}}$

$= \dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}\,i} = \dfrac{2\sqrt{2}\,i}{i^2}$

$= \dfrac{\sqrt{8}}{i} = \underline{-2\sqrt{2}\,i}$

(4) $(\sqrt{3}+\sqrt{-2})(\sqrt{3}-\sqrt{-2})$

$= (\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i)$

$= 3-2i^2$

$= \underline{5}$

(5) $\dfrac{2-\sqrt{-3}}{2+\sqrt{-3}}$

$= \dfrac{2-\sqrt{3}\,i}{2+\sqrt{3}\,i}$

$= \dfrac{(2-\sqrt{3}\,i)(2-\sqrt{3}\,i)}{(2+\sqrt{3}\,i)(2-\sqrt{3}\,i)}$

$= \dfrac{4-4\sqrt{3}\,i+3i^2}{4-3i^2} = \underline{\dfrac{1-4\sqrt{3}\,i}{7}}$

**【２次方程式の解法】**

6 次の２次方程式を解け。

(1) $3x^2-4x+2=0$

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-24}}{6} = \dfrac{4\pm2\sqrt{2}\,i}{6}$

$= \dfrac{4\pm\sqrt{-8}}{6} = \underline{\dfrac{2\pm\sqrt{2}\,i}{3}}$

(2) $x^2+\sqrt{2}\,x+1=0$

$x=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2}$

$= \underline{\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}}$

(3) $x^2-2\sqrt{3}\,x+4=0$

$x=\dfrac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-16}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}\pm2i}{2}$

$= \dfrac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{4}\,i}{2} = \underline{\sqrt{3}\pm i}$

**【解の判別】**

7 次の２次方程式の解の種類を判別せよ。

(1) $x^2+5x+5=0$

$D=25-20=5>0$

異なる２つの実数解

(2) $-4x^2+x-1=0$

$4x^2-x+1=0$

$D=1-16=-15<0$

異なる２つの虚数解

(3) $x^2+2\sqrt{3}x+3=0$

$D=12-12=0$

重解

**【判別式の利用】**

8 $m$ を定数とする。次の2次方程式の解の種類を判別せよ。

$$x^2+(m+1)x+1=0$$

$D=(m+1)^2-4$

$=m^2+2m-3$

$=(m+3)(m-1)$

$D>0$ のとき

$(m+3)(m-1)>0$

$m<-3,\ 1<m$

$D=0$ のとき

$(m+3)(m-1)=0$

$m=-3,\ 1$

$D<0$ のとき

$(m+3)(m-1)<0$

$-3<m<1$

よって

$m<-3,\ 1<m$ のとき 2コ

$m=-3,\ 1$ のとき 1コ

$-3<m<1$ のとき 0コ

**【解と係数の関係】**

9 ２次方程式 $x^2+3x-1=0$ の２つの解を $\alpha$, $\beta$ とするとき，次の式の値を求めよ

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-3\\ \alpha\beta=-1\end{cases}$$

$=9+2$

$=11$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=-27+3(-3)$

$=-36$

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta^2}{\alpha\beta}+\dfrac{\alpha^2}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$ （(1)より $\alpha^2+\beta^2=11$）

$=\dfrac{11}{-1}=-11$

(4) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

$=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$

$=11+2$

$=13$

**【解と係数の関係の応用】**

10 ２次方程式 $x^2+5x+m=0$ の２つの解が次の条件を満たすとき，定数 $m$ の値と２つの解を，それぞれ求めよ。

(1) １つの解が他の解の４倍である。

$\alpha$, $4\alpha$ とおく

解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+4\alpha=-5 & \text{—①}\\ \alpha\cdot 4\alpha=m & \text{—②}\end{cases}$$

①より

$5\alpha=-5$

$\alpha=-1$

②に代入

$m=4$

よって

$m=4$ 　２解 $-1,\ -4$

(2) ２つの解の差が１である。

$\alpha$, $\alpha+1$ とおく

解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+(\alpha+1)=-5 & \text{—①}\\ \alpha\cdot(\alpha+1)=m & \text{—②}\end{cases}$$

①より

$2\alpha=-6$

$\alpha=-3$

②に代入

$m=6$

よって

$m=6$, ２解 $-2,\ -3$

**【２次式の因数分解】**

11 ２次式 $2x^2-2x+3$ を，複素数の範囲で因数分解せよ。

$2x^2-2x+3=0$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-24}}{4}$

$=\dfrac{2\pm\sqrt{20}\,i}{4}$

$=\dfrac{2\pm2\sqrt{5}\,i}{4}$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{5}\,i}{2}$

よって

$2x^2-2x-3=2\left(x-\dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{5}i}{2}\right)$

**【2数を解とする2次方程式[1]】**

**12** 次の2数を解とする2次方程式を作れ。

(1) $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$

和 $(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

積 $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$

よって $x-4x+1=0$

(2) $1+2i$, $1-2i$

和 $(1+2i)+(1-2i)=2$

積 $(1+2i)(1-2i)=1+4=5$

よって $x^2-2x+5=0$

**【和と積からの2数の決定】**

**13** 和が $-2$, 積が4となる2数を求めよ。

$x^2+2x+4=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{2}$$

$$=\frac{-2\pm2\sqrt{3}i}{2}$$

$$=-1\pm\sqrt{3}i$$

**【2数を解とする2次方程式[2]】**

**14** 2次方程式 $x^2-3x-1=0$ の2つの解を $\alpha$, $\beta$ とするとき，次の2数を解とする2次方程式を作れ。

(1) $1-\alpha$, $1-\beta$

解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha\beta=-1\end{cases}$$

和 $(1-\alpha)+(1-\beta)=2-(\alpha+\beta)=2-3=-1$

積 $(1-\alpha)(1-\beta)=1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta$

$=1-3-1$

$=-3$

よって $x^2+x-3=0$

(2) $\alpha^2$, $\beta^2$

(1)より

和 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=9+2$

$=11$

和 $\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2$

$=1$

よって $x^2-11x+1=0$

**【剰余の定理】**

**15** $P(x)=x^3+x^2-3x-2$ を次の1次式で割った余りを求めよ。

(1) $x-2$

$P(2)=8+4-6-2$

$=4$

(2) $x+1$

$P(-1)=-1+1+3-2$

$=1$

(3) $2x-1$

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-2$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{2}{8}-\frac{12}{8}-\frac{16}{8}=-\frac{25}{8}$$

**【剰余の定理による係数の決定】**

**16** 整式 $P(x)=2x^3+5ax^2+ax+1$ を $x+1$ で割った余りが $-5$ であるとき，定数 $a$ の値を求めよ。

$P(-1)=-5$

$P(-1)=-2+5a-a+1$

$=4a-1=-5$

$4a=-4$

$a=-1$

**【2次式で割った余りと剰余の定理】**

**17** 多項式 $P(x)$ を $x-3$, $x+1$ で割った余りがそれぞれ 1, 5 である。$P(x)$ を $(x-3)(x+1)$ で割った余りを求めよ。 $P(3)=1$, $P(-1)=5$

$P(x)=Q(x)(x-3)(x+1)+ax+b$ とおく

$P(3)=3a+b=1$ —①

$P(-1)=-a+b=5$ —②

①−②

$4a=-4$

$a=-1$

①に代入

$-3+b=1$

$b=4$

よって $-x+4$

**【組立除法による割り算】**

**18** 組立除法を用いて，次の整式 $A$ を1次式 $B$ で割った商と余りを求めよ。

(1) $A=x^3-3x^2-6x+8$, $B=x+2$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -3 & -6 & 8 \\ & & -2 & 10 & -8 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}$$

商 $x^2-5x+4$

余り 0

(2) $A=x^3-x+2$, $B=x-2$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 8 \end{array}$$

商 $x^2+2x+3$

余り 8

**【高次式の因数分解】**

19 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3-4x^2+x+6$

$= (x+1)(x^2-5x+6)$

$= (x+1)(x-2)(x-3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

(2) $2x^3+7x^2+2x-3$

$= (x+1)(2x^2+5x-3)$

$= (x+1)(2x-1)(x+3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 7 & 2 & -3 \\ & & -2 & -5 & 3 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

**【因数定理による高次式の解法】**

20 次の方程式を解け。

(1) $x^3-7x-6=0$

$(x+1)(x^2-x-6)=0$

$(x+1)(x-3)(x+2)=0$

$x=-2, -1, 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

(2) $x^3-4x^2+9x-10=0$

$(x-2)(x^2-2x+5)=0$

$x^2-2x+5=0$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}$

$=\dfrac{2\pm\sqrt{16}\,i}{2}$

$=\dfrac{2\pm 4i}{2} = 1\pm 2i$

$x=2,\ 1\pm 2i$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 9 & -10 \\ & & 2 & -4 & 10 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & 0 \end{array}$$

(3) $x^3-8=0$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$x^2+2x+4=0$

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}$

$=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{3}\,i}{2}$

$=-1\pm\sqrt{3}\,i$

$x=2,\ -1\pm\sqrt{3}\,i$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

**【因数分解による高次方程式の解法】**

21 次の方程式を解け。

(1) $x^4+x^2-12=0$

$x^2=A$ とおく

$A^2+A-12=0$

$(A+4)(A-3)=0$

$(x^2+4)(x^2-3)=0$

$x^2+4=0$

$x^2=-4$

$x=\pm\sqrt{-4}$

$=\pm\sqrt{4}\,i$

$=\pm 2i$

$x^2-3=0$

$x^2=3$

$x=\pm\sqrt{3}$

$x=\pm 2i,\ \pm\sqrt{3}$

(2) $x^4-1=0$

$x^2=A$ とおく

$A^2-1=0$

$(A+1)(A-1)=0$

$(x^2+1)(x^2-1)=0$

$x^2-1=0$

$x^2=1$

$x=\pm 1$

$x^2+1=0$

$x^2=-1$

$x=\pm\sqrt{-1}$

$=\pm\sqrt{1}\,i$

$=\pm i$

$x=\pm 1,\ \pm i$

**【高次方程式とその虚数解】**

22 $x$ の方程式 $x^3+x^2+ax+b=0$ が $1-i$ を解にもつとき，実数の係数 $a$，$b$ の値を求めよ。また，他の解を求めよ。

$(1-i)^3=(1-i)^2(1-i)$

$=(1-2i+i^2)(1-i)$

$=-2i(1-i)$

$=-2i+2i^2$

$=-2i-2$

$(1-i)^3+(1-i)^2+a(1-i)+b=0$

$-2i-2-2i+a-ai+b=0$

$(a+b-2)+(-a-4)i=0$

$$\begin{cases} a+b-2=0 & \text{—①} \\ -a-4=0 & \text{—②} \end{cases}$$

②より

$a=-4$

①に代入

$b=6$

よって

$x^3+x^2-4x+6=0$

$(x+3)(x^2-2x+2)=0$

$x=-3,\ 1\pm i$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 1 & -4 & 6 \\ & & -3 & 6 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

よって

$a=-4,\ b=6$. 他の解 $1,\ 1-i$

$\omega^3=1$

$\omega^2+\omega+1=0$

**【１の虚数解の３乗根 ω】**

23 方程式 $x^3=1$ の虚数解の１つを $\omega$ とするとき，次の値を求めよ。

(1) $\omega^6$

$=(\omega^3)^2$

$=1$

(2) $\omega^2+\omega+1$

$=0$

(3) $\omega^3+\omega^2+\omega$

$=\omega(\omega^2+\omega+1)$

$=0$

(4) $\omega^5+\omega^4$

$=\omega^3(\omega^2+\omega)$

$=1\cdot(-1)$

$=-1$