

# 指数①

## 【指数法則】

1 次の計算をせよ。ただし、 $a \neq 0$  とする。

(1)  $a^5 \times a^4 = a^9$

(2)  $a^6 \div a^3 = a^3$

(3)  $(2a^2)^4 = 16a^8$

(4)  $3^2 \div 3^{-1} = 3^3 = 27$

(5)  $a^5 \times a^{-2} \div a^{-3}$   
 $= a^{5-2+3}$   
 $= a^6$

(6)  $3^5 \times 9^{-4} \div 27^{-2}$   
 $= 3^5 \times 3^{-8} \div 3^{-6}$   
 $= 3^{5-8+6}$   
 $= 3^3$   
 $= 27$

(7)  $12^3 \times 2^{-4}$   
 $= (2^2 \times 3)^3 \times 2^{-4}$   
 $= 2^6 \times 3^3 \times 2^{-4}$   
 $= 2^2 \times 3^3$   
 $= 108$

## 【累乗根の性質】

2 次の計算をせよ。

(1)  $\sqrt[4]{16} = 2$

(2)  $\sqrt[3]{27} = 3$

(3)  $\sqrt[3]{-27} = -3$

(4)  $\sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{25 \times 5}$   
 $= 5$

(5)  $(\sqrt[3]{3})^9 = (\sqrt[3]{3^9})$   
 $= 27$

(6)  $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{8}$   
 $= 2$

(7)  $\sqrt{\sqrt{256}} = \sqrt[4]{256}$   
 $= 2$

## 【累乗根の計算】

3 次の式を計算せよ。

(1)  $8^{\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{3}{2}}$   
 $= 2^2 \times 2^3$   
 $= 2^5$   
 $= 32$

(2)  $2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}} \div 2^{\frac{1}{3}}$   
 $= 2^{-\frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3}}$   
 $= 2^0$   
 $= 1$

(3)  $(3^{-2} \times 9^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$   
 $= (3^{-2} \times 3^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}}$   
 $= (3^{-2 + \frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}}$   
 $= (3^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$   
 $= 3^{-1} = \frac{1}{3}$

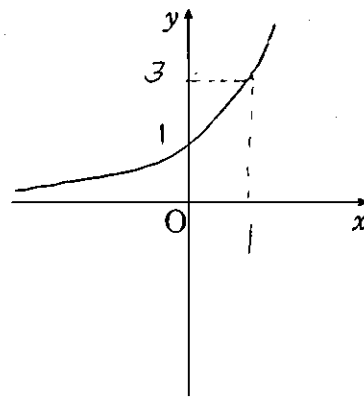
(4)  $\sqrt[3]{5} \div \sqrt[4]{5} \times \sqrt[5]{25}$   
 $= 5^{\frac{1}{3}} \div 5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{1}{2}}$   
 $= 5^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$   
 $= 5^{\frac{5}{12}}$   
 $= \sqrt[12]{5^5}$

(5)  $\sqrt{6} \times \sqrt[4]{54} \div \sqrt[4]{6}$   
 $= 6^{\frac{1}{2}} \times 54^{\frac{1}{4}} \div 6^{\frac{1}{4}}$   
 $= (2 \times 3)^{\frac{1}{2}} \times (2 \times 3^3)^{\frac{1}{4}} \times (2 \times 3)^{-\frac{1}{4}}$   
 $= 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}} \times 2^{-\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{4}}$   
 $= 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}}$   
 $= 2^{\frac{1}{2}} \times 3$   
 $= 3\sqrt{2}$

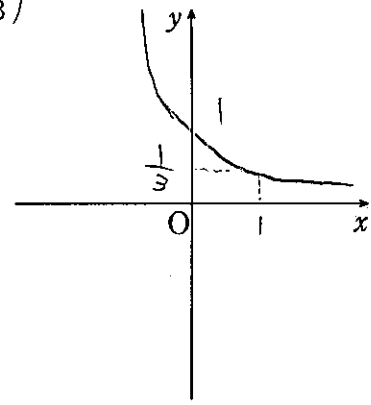
## 【指数関数のグラフ】

4 次の関数のグラフをかけ。

(1)  $y = 3^x$



(2)  $y = (\frac{1}{3})^x$



## 【累乗根で表された数の大小比較[1]】

5 次の3つの数の大小を不等号を用いて表せ。

(1)  $\sqrt{3}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[4]{27}$

$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{6}{12}}$

$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{8}{12}}$

底  $3 > 1$

$\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{9}{12}}$

$\sqrt{3} < \sqrt[3]{9} < \sqrt[4]{27}$

(2)  $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}, \sqrt[5]{\frac{1}{27}}, 1$

$\sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \sqrt[3]{(\frac{1}{3})^2} = (\frac{1}{3})^{\frac{2}{3}} = (\frac{1}{3})^{\frac{10}{15}}$

$\sqrt[5]{\frac{1}{27}} = \sqrt[5]{(\frac{1}{3})^3} = (\frac{1}{3})^{\frac{3}{5}} = (\frac{1}{3})^{\frac{9}{15}}$

底  $\frac{1}{3} < 1$

$1 = (\frac{1}{3})^0$

$\sqrt[3]{\frac{1}{9}} < \sqrt[5]{\frac{1}{27}} < 1$

## 【累乗根で表された数の大小比較[2]】

6 次の2つの数  $\sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{7}$  の大小を不等号を用いて表せ。

$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

$(5^{\frac{1}{3}})^{12} = 5^4 = 625$

$\sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}}$

$(7^{\frac{1}{4}})^{12} = 7^3 = 343$

$5 > 2$

$\sqrt[4]{7} < \sqrt[3]{5}$

## 【指数方程式】

7 次の方程式を解け。

(1)  $5^x = 125$

$5^x = 5^3$

$x = 3$

(2)  $8^x = (\frac{1}{2})^{x-4}$

$2^{3x} = 2^{-x+4}$

$3x = -x + 4$

$4x = 4$

$x = 1$

(3)  $(\sqrt{3})^x = 9^{1-x}$

$3^{\frac{1}{2}x} = 3^{2-2x}$

$\frac{1}{2}x = 2 - 2x$

$\frac{5}{2}x = 2$

$x = \frac{4}{5}$

指数②

【指数不等式】

8 次の不等式を解け。

(1)  $3^x \leq 27$

$3^x \leq 3^3$

底  $3 > 1$

$x \leq 3$

(2)  $2^{x+1} > 8$

$2^{x+1} > 2^3$

底  $2 > 1$

$x+1 > 3$

$x > 2$

(3)  $(\frac{1}{3})^{2x-1} > \frac{1}{81}$

$(\frac{1}{3})^{2x-1} > (\frac{1}{3})^4$

底  $\frac{1}{3} < 1$

$2x-1 < 4$

$2x < 5$

$x < \frac{5}{2}$

【指数方程式・不等式】

9 次の方程式・不等式を解け。

(1)  $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$

$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 3 = 0$

$2^x = t$  とおく ( $t > 0$ )

$t^2 + 2t - 3 = 0$  ①

$(t+3)(t-1) = 0$

$t = \cancel{3}, 1$

①より

$t = 1$  のとき

$2^x = 1$

$2^x = 2^0$

$x = 0$

(2)  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

$(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

$3^x = t$  とおく ( $t > 0$ )

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$(t-3)(t-1) = 0$

$t = 1, 3$

$t = 1$  のとき

$3^x = 1$

$3^x = 3^0$

$x = 0$

$t = 3$  のとき

$3^x = 3^1$

$x = 1$

よって

$x = 0, 1$

(3)  $9^x + 3^x - 12 > 0$

$(3^x)^2 + 3^x - 12 > 0$

$3^x = t$  とおく ( $t > 0$ )

$t^2 + t - 12 > 0$  ①

$(t+4)(t-3) > 0$

①より

$t - 3 > 0$

$t > 3$

$3^x > 3^1$

$x > 1$

(4)  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 \leq 0$

$(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 \leq 0$

$3^x = t$  とおく ( $t > 0$ )

$t^2 - 4t + 3 \leq 0$

$(t-3)(t-1) \leq 0$

$1 \leq t \leq 3$

$1 \leq 3^x \leq 3$

$3^0 \leq 3^x \leq 3^1$

$0 \leq x \leq 1$

【指数方程式の最大・最小】

10 関数  $y = 4^x - 2^{x+1} + 2$  ( $x \leq 2$ ) の最大値, 最小値, およびそのときの  $x$  の値を求めよ。

$y = (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 2$

$2^x = t$  とおく ( $t > 0$ )

$y = t^2 - 2t + 2$  ①

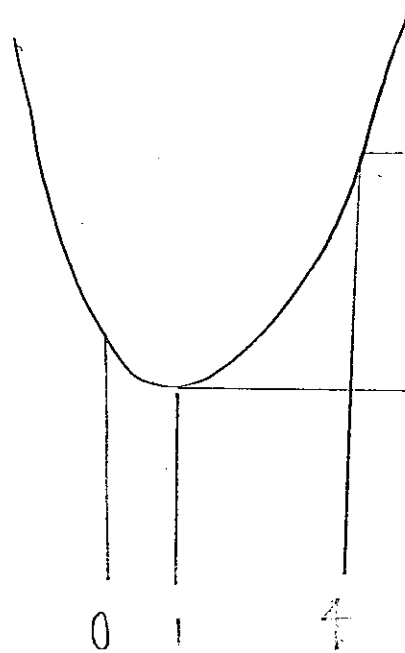
$= (t-1)^2 - 1 + 2$

$= (t-1)^2 + 1$

$\left( \begin{array}{l} x \leq 2 \\ \downarrow \\ 2^x \leq 2^2 \\ \downarrow \\ t \leq 4 \end{array} \right)$  ②

①②より

$0 < t \leq 4$



$y(4) = 9 + 1 = 10$

Max 10 ( $t = 4$ )

min 1 ( $t = 1$ )

$t = 4$  のとき

$2^x = 2^2$

$x = 2$

$t = 1$  のとき

$2^x = 2^0$

$x = 0$

Max 10 ( $x = 2$ )

min 1 ( $x = 0$ )