【真偽】

$\boxed{1}$ 次の命題の真偽を調べ，偽のときは反例を1つ示せ。ただし，a，b，c は実数，m，n は自然数とする。

(1) $a=0 \Longrightarrow ab=0$

真偽	反例
真	

(2) m，n がともに素数 $\Longrightarrow m+n$ は偶数

真偽	反例
偽	$m=2$，$n=3$

(3) $ac=bc \Longrightarrow a=b$

真偽	反例
偽	$a=1$，$b=2$，$c=0$

(4) $|a|=|b| \Longrightarrow a=b$

真偽	反例
偽	$a=1$，$b=-1$

(5) $a=2 \Longrightarrow a^2-5a+6=0$

真偽	反例
真	

(6) $a^2=3a \Longrightarrow a=3$

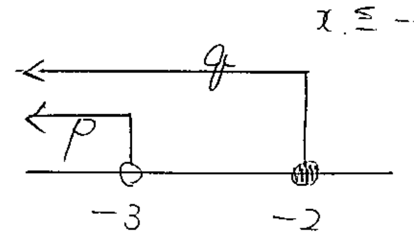
真偽	反例
偽	$a=0$

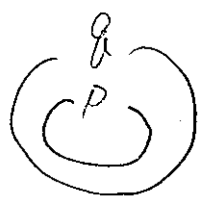
$\boxed{2}$ 次の条件 p，q について，命題 $p \Longrightarrow q$ の真偽を集合を用いて調べよ。ただし，x は実数，n は自然数とする。

(1) $p: x<-3$，$q: 2x+4 \leqq 0$

$2x+4 \leqq 0$
$2x \leqq -4$
$x \leqq -2$

真偽
真





(2) p：n は12の正の約数，q：n は24の正の約数

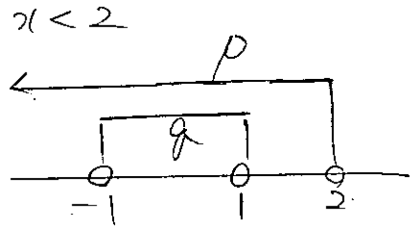
真偽
真

12の約数 $=\{1,2,3,4,6,12\}$
24の約数 $=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

(3) $p: 2x-4<0$，$q: -1<x<1$

真偽
偽

$2x-4<0$
$2x<4$
$x<2$



【必要十分条件】

$\boxed{3}$ 次の $\boxed{}$ に適するものを下の ①～③ から選べ。ただし，x，y は実数とする。

(1) $\underbrace{x^2-6x+8=0}_{p}$ は $\underbrace{x=4}_{q}$ であるための $\boxed{②}$。

反例：$x=2$

$p \underset{○}{\overset{×}{\rightleftarrows}} q$

$(x-4)(x-2)=0$
$x=2, 4$

(2) $\underbrace{xy=1}_{p}$ は $\underbrace{x=1 \text{ かつ } y=1}_{q}$ であるための $\boxed{②}$。

反例：$x=\frac{1}{2}$，$y=2$

$p \underset{○}{\overset{×}{\rightleftarrows}} q$

(3) $\underbrace{x>0 \text{ かつ } y>0}_{p}$ は $\underbrace{xy>0}_{q}$ であるための $\boxed{③}$。

$p \underset{×}{\overset{○}{\rightleftarrows}} q$

反例：$x=-2$，$y=-2$

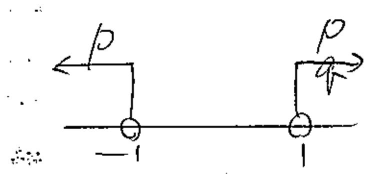
(4) $\underbrace{\triangle ABC\text{が正三角形}}_{p}$であることは，$\underbrace{\triangle ABC\text{が二等辺三角形}}_{q}$であるための $\boxed{③}$。

$p \underset{×}{\overset{○}{\rightleftarrows}} q$

(5) $\underbrace{x^2>1}_{p}$ は $\underbrace{x>1}_{q}$ であるための $\boxed{②}$。

$p \underset{○}{\overset{×}{\rightleftarrows}} q$

$x^2>1$
$x<-1,\ 1<x$



(6) $|x|=|y|$ は $x^2=y^2$ であるための $\boxed{①}$。

① 必要十分条件である
② 必要条件であるが，十分条件ではない
③ 十分条件であるが，必要条件ではない

【否定】

$\boxed{4}$ 次の条件の否定を述べよ。ただし，x，y は実数，m，n は整数とする。

(1) x は無理数である。

否定
x は有理数である

(2) $x \neq 0$ または $y=0$

否定
$x=0$ かつ $y \neq 0$

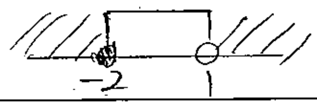
(3) $x \leqq 0$ または $y>0$

否定
$x>0$ かつ $y \leqq 0$

(4) $-2 \leqq x < 1$

否定

$x < -2,\ 1 \leqq x$



(5) m, n はともに偶数である。

否定

m, n の少なくとも一方は奇数

【逆・裏・対偶】

5 次の命題の逆・裏・対偶を述べ，それらの真偽を調べよ。ただし，x，y は実数，n は整数とする。

(1) $x^2 \neq -x \Longrightarrow x \neq -1$

		真偽
逆	$x \neq -1 \Rightarrow x^2 \neq -x$	偽
裏	$x^2 = -x \Rightarrow x = -1$	偽
対偶	$x = -1 \Rightarrow x^2 = -x$	真

反例: $x = 0$

(2) n は 4 の倍数 $\Longrightarrow$ n は 8 の倍数

		真偽
逆	nは8の倍数 $\Rightarrow$ nは4の倍数	真
裏	nは4の倍数でない $\Rightarrow$ nは8の倍数でない	真
対偶	nは8の倍数でない $\Rightarrow$ nは4の倍数でない	偽

$x = \sqrt{2},\ y = -\sqrt{2}$

(3) $x+y$ は有理数 $\Longrightarrow$ x または y は有理数

		真偽
逆	xまたはyは有理数 $\Rightarrow$ $x+y$は有理数	偽
裏	$x+y$は無理数 $\Rightarrow$ xかつyは無理数	偽
対偶	xかつyは無理数 $\Rightarrow$ $x+y$は無理数	偽

反例: $x = \sqrt{2},\ y = 0$

【対偶を利用した証明】

6 対偶を利用して，次の命題を証明せよ。m，n は整数とする。

(1) n^2+4n+1 が 4 の倍数ならば，n は 奇数である。

対偶

nが偶数ならば，n^2+4n+3 は 4の倍数でない

証明

対偶が真であることを示す

nは偶数より

$2k$ （k：整数） とおく

$n^2+4n+1 = (2k)^2 + 4(2k) + 1$

$= 4k^2 + 8k + 1$

$= 4(k^2+2k) + 1$

$(k^2+2k$：整数$)$

よって示された。

(2) mn が偶数ならば，m，n のうち少なくとも 1 つは偶数である。

対偶

m, nがともに奇数ならば mnは奇数である。

証明

対偶が真であることを示す

m, nは奇数より

$m = 2k+1$

$n = 2l+1$ （k, l：整数） とおく

$mn = (2k+1)(2l+1)$

$= 4kl + 2k + 2l + 1$

$= 2(2kl + k + l) + 1$

$(2kl + k + l$：整数$)$

よって示された。

【背理法を利用した証明】

7 $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて，次の命題を証明せよ。

$1+2\sqrt{3}$ は無理数である。

証明

$1+2\sqrt{3}$ は有理数と仮定する

$1+2\sqrt{3} = r$ （r：有理数） とおく

$2\sqrt{3} = r-1$

$\sqrt{3} = \dfrac{r-1}{2}$

$\sqrt{3}$ は無理数

$\dfrac{r-1}{2}$ は有理数 なので矛盾

よって $1+2\sqrt{3}$ は無理数である。