

# 対数①

## 【対数】

① 次の値を求めよ。

(1)  $\log_2 2^5 = 5$

(2)  $\log_5 25 = 2$

(3)  $\log_3 3 = 1$

(4)  $\log_3 1 = 0$

(5)  $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

(6)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$

(7)  $\log_{10} 0.1 = \log_{10} \frac{1}{10} = -1$

(8)  $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$

(9)  $\log_2 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

(10)  $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2$

## 【対数の計算】

② 次の計算をせよ。

(1)  $\log_4 2 + \log_4 8$

$$= \log_4 16$$

$$= 2$$

(2)  $\log_3 2 - \log_3 18$

$$= \log_3 \frac{1}{9}$$

$$= -2$$

(3)  $\log_3 4 + \log_3 18 - 3\log_3 2$

$$= \log_3 4 + \log_3 18 - \log_3 2^3$$

$$= \log_3 \frac{4 \times 18}{8}$$

$$= \log_3 9$$

$$= 2$$

(4)  $\log_2 \sqrt[3]{12} - \frac{1}{3}\log_2 3$

$$= \log_2 12^{\frac{1}{3}} - \log_2 3^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_2 \frac{12^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \log_2 \left(\frac{12}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_2 4^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_2 2^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

## 【底の変換公式】

③ 次の計算をせよ。次の式を簡単にせよ。

(1)  $\log_4 8$

$$= \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$$

$$= \frac{3}{2}$$

(2)  $\log_9 3$

$$= \frac{\log_3 3}{\log_3 9}$$

$$= \frac{1}{2}$$

(3)  $\log_3 2 \cdot \log_2 27$

$$= \frac{\log_2 2}{\log_2 3} \cdot \log_2 3^3$$

$$= \frac{1}{\log_2 3} \cdot \frac{3\log_2 3}{1}$$

$$= 3$$

(4)  $\log_3 8 \cdot \log_4 3$

$$= \frac{\log_3 8}{\log_3 3} \cdot \frac{\log_3 3}{\log_3 4}$$

$$= \frac{\log_3 8}{\log_3 4}$$

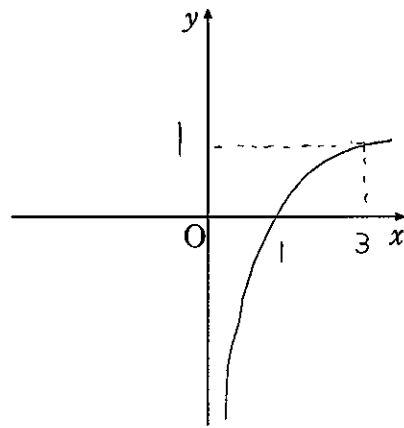
$$= \frac{\log_3 2^3}{\log_3 2^2}$$

$$= \frac{3\log_3 2}{2\log_3 2} = \frac{3}{2}$$

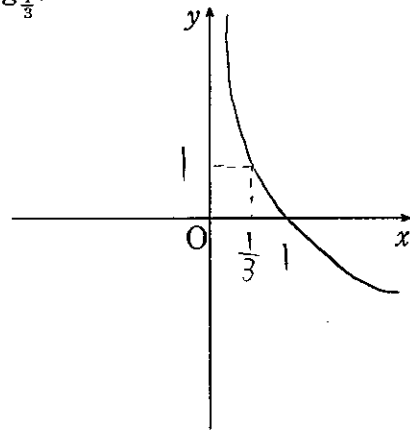
## 【対数関数のグラフ】

④ 次の関数のグラフをかけ。

(1)  $y = \log_3 x$



(2)  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$



## 【対数で表された数の大小比較】

⑤ 次の2つの数の大小を不等号を用いて表せ。

(1)  $3\log_4 3, 2\log_4 5$

$$3\log_4 3 = \log_4 3^3 = \log_4 27$$

$$\text{底 } 4 > 1$$

$$2\log_4 5 = \log_4 5^2 = \log_4 25$$

$$2\log_4 5 < 3\log_4 3$$

(2)  $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8, \log_{\frac{1}{4}} 3$

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{\frac{1}{4}} 8^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8}$$

$$\text{底 } \frac{1}{4} < 1$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 3 = \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{9}$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 3 < \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8$$

(3)  $\log_2 3, 2$

$$\log_2 3$$

$$\text{底 } 2 > 1$$

$$2 = \log_2 4$$

$$\log_2 3 < \log_2 4$$

## 【対数方程式】

⑥ 次の方程式を解け。

(1)  $\log_2 x = 4$

真数  $x > 0$

$$\log_2 x = \log_2 16$$

$$x = 16$$

(2)  $\log_{\frac{1}{2}} x = 0$

真数  $x > 0$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 1$$

$$x = 1$$

(3)  $\log_3(x+1) = 2$

真数  $x+1 > 0$

$$x > -1$$

$$\log_3(x+1) = \log_3 9$$

$$x+1 = 9$$

$$x = 8$$

(4)  $\log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} 5$

真数  $x > 0$

$$\log_2 x = \frac{\log_2 5}{\log_2 \frac{1}{2}}$$

$$\log_2 x = -\log_2 5$$

$$\log_2 x = \log_2 5^{-1}$$

$$x = \frac{1}{5}$$

# 対数②

## 【対数不等式】

7 次の不等式を解け。

(1)  $\log_3 x < 1$

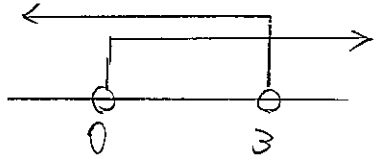
真数  $x > 0$  — ①

$\log_3 x < \log_3 3$

底  $3 > 1$

$x < 3$  — ②

①②より



$0 < x < 3$

(2)  $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > 1$

真数  $x-1 > 0$

$x > 1$  — ①

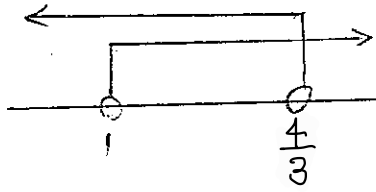
$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$

底  $\frac{1}{3} < 1$

$x-1 < \frac{1}{3}$

$x < \frac{4}{3}$  — ②

①②より



$1 < x < \frac{4}{3}$

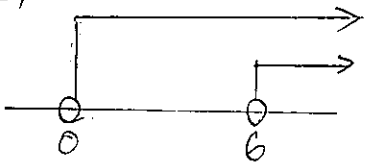
## 【対数方程式・不等式】

8 次の方程式、不等式を解け。

(1)  $\log_4 x + \log_2(x-6) = 2$

真数  $x > 0$ ,  $x-6 > 0$   
 $x > 6$  — ① — ②

①②より



$x > 6$  — ③

$\log_4 x + \log_4(x-6) = 2$

$\log_4 x + \log_4(x-6) = \log_4 16$

$x(x-6) = 16$

$x^2 - 6x - 16 = 0$

$(x-8)(x+2) = 0$

$x = \cancel{-2}, 8$

③より

$\checkmark > 2$

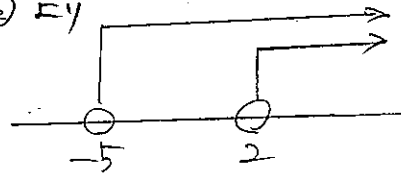
$x = 8$

(2)  $\log_2(x+5) + \log_2(x-2) = 3$

真数  $x+5 > 0$ ,  $x-2 > 0$

$x > -5$  — ①  $x > 2$  — ②

①②より



$x > 2$  — ③

$\log_2(x+5) + \log_2(x-2) = \log_2 8$

$(x+5)(x-2) = 8$

$x^2 + 3x - 10 = 8$

$x^2 + 3x - 18 = 0$

$(x+6)(x-3) = 0$

$x = \cancel{-6}, 3$

③より

$\checkmark > 2$ ,  $x = 3$

(3)  $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \leq \log_{\frac{1}{3}} x$

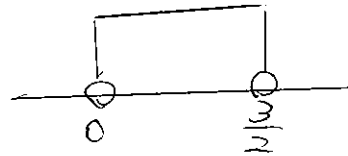
真数  $3-2x > 0$

$x > 0$  — ①

$2x < 3$

$x < \frac{3}{2}$  — ②

①②より



$0 < x < \frac{3}{2}$  — ③

$\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \leq \log_{\frac{1}{3}} x$

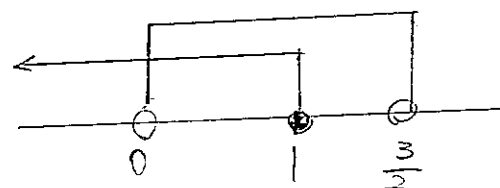
底  $\frac{1}{3} < 1$

$3-2x \geq x$

$3x \leq 3$

$x \leq 1$  — ④

③④より

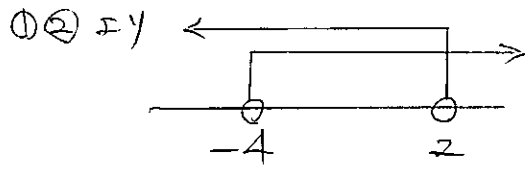


$0 < x \leq 1$

対数③

(4)  $2\log_3(2-x) < \log_3(x+4)$

真数  $2-x > 0, x+4 > 0$   
 $x < 2, x > -4$   
 ① ②



$-4 < x < 2$  ③

$2\log_3(2-x) < \log_3(x+4)$

$\log_3(2-x)^2 < \log_3(x+4)$

底  $3 > 1$

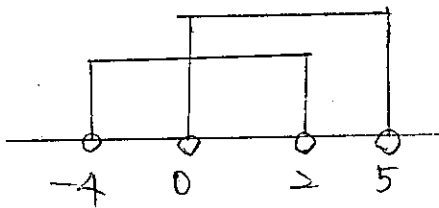
$4 - 4x + x^2 < x + 4$

$x^2 - 5x < 0$

$x(x-5) < 0$

$0 < x < 5$  ④

③④より



$0 < x < 2$

【対数方程式・不等式[2]】

9 次の方程式、不等式を解け。

(1)  $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^4 = 0$

真数  $x > 0, x^4 > 0$   
 ①  $x > 0$  ②

①②より  $x > 0$

$(\log_3 x)^2 - \log_3 x^4 = 0$

$(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x = 0$

$\log_3 x = t$  とおく

$t^2 - 4t = 0$

$t(t-4) = 0$

$t = 0, 4$

$t = 0$  のとき  $t = 4$  のとき

$\log_3 x = 0$

$x = 1$

$\log_3 x = 4$

$\log_3 x = \log_3 81$

$x = 81$

$x = 1, 81$

(2)  $(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 \geq 0$

真数  $x > 0$  ①

$(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 \geq 0$

$\log_3 x = t$  とおく

$t^2 - t - 2 \geq 0$

$(t-2)(t+1) \geq 0$

$t \leq -1, 2 \leq t$

$t \leq -1$  のとき

$\log_3 x \leq -1$

$\log_3 x \leq \log_3 \frac{1}{3}$

底  $3 > 1$

$x \leq \frac{1}{3}$  ②

$2 \leq t$  のとき

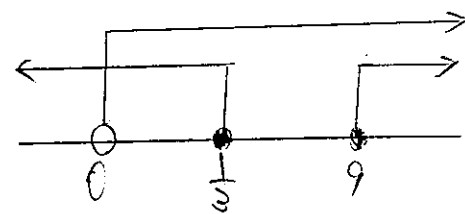
$2 \leq \log_3 x$

$\log_3 9 \leq \log_3 x$

底  $3 > 1$

$9 \leq x$  ③

①②③より



$0 < x \leq \frac{1}{3}$

$9 \leq x$

【対数の表示】

10  $\log_{10} 2 = a, \log_{10} 3 = b$  とするとき、次の値を  $a, b$  を用いて表せ。

(1)  $\log_{10} 12$

$= \log_{10} (4 \times 3)$

$= \log_{10} 4 + \log_{10} 3$

$= \log_{10} 2^2 + \log_{10} 3$

$= 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3$

$= 2a + b$

(2)  $\log_{10} \frac{8}{9}$

$= \log_{10} 8 - \log_{10} 9$

$= \log_{10} 2^3 - \log_{10} 3^2$

$= 3\log_{10} 2 - 2\log_{10} 3$

$= 3a - 2b$

(3)  $\log_{10} 5$

$= \log_{10} \frac{10}{2}$

$= \log_{10} 10 - \log_{10} 2$

$= 1 - a$

(4)  $\log_4 3$

$= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 4}$

$= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2^2}$

$= \frac{\log_{10} 3}{2\log_{10} 2}$

$= \frac{\log_{10} 3}{2\log_{10} 2} = \frac{b}{2a}$

対数④

【対数関数の最大・最小】

11  $1 \leq x \leq 16$  のとき、関数  $y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^2$  の最大値と最小値を求めよ。

$$y = (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x$$

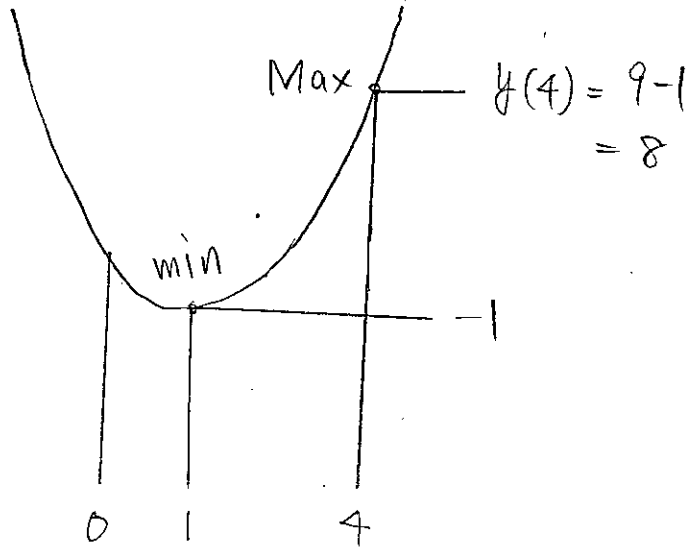
$$\log_2 x = t \text{ とおす}$$

$$y = t^2 - 2t$$

$$= (t-1)^2 - 1$$

頂  $(1, -1)$

$$\left( \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 16 \\ \downarrow \\ \log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 16 \\ \downarrow \\ 0 \leq t \leq 4 \end{array} \right)$$



Max 8 ( $t=4$ )  
min -1 ( $t=1$ )

$t=4$  のとき

$$\log_2 x = 4$$

$$\log_2 x = \log_2 16$$

$$x = 16$$

$t=1$  のとき

$$\log_2 x = 1$$

$$\log_2 x = \log_2 2$$

$$x = 2$$

よって

Max 8 ( $x=16$ )

min -1 ( $x=2$ )

【桁数】

12  $\log_{10} 2 = 0.3010$  とする。次の問いに答えよ。

(1)  $2^{20}$  は何桁の数か。

$$\log_{10} 2^{20} = 20 \log_{10} 2$$

$$= 20 \times 0.3010$$

$$= 6.02$$

$$\begin{array}{r} 0.3010 \\ \times 20 \\ \hline 6.0200 \end{array}$$

$$6 < \log_{10} 2^{20} < 7$$

$$10^6 < 2^{20} < 10^7$$

よって  $\underline{7}$  桁

【小数首位】

13  $(\frac{4}{5})^{100}$  は小数第何位に初めて0でない数字が現れるか。

$$\log_{10} \left(\frac{4}{5}\right)^{100} = 100 \log_{10} \left(\frac{4}{5}\right)$$

$$= 100 \log_{10} \left(\frac{8}{10}\right)$$

$$= 100 (\log_{10} 8 - \log_{10} 10)$$

$$= 100 (\log_{10} 2^3 - 1)$$

$$= 100 (3 \log_{10} 2 - 1)$$

$$= 100 (3 \times 0.3010 - 1)$$

$$= 100 \times (-0.097)$$

$$= -9.7$$

$$\begin{array}{r} 0.99 \\ \times 0.010 \\ \hline 0.990 \\ \hline 0.097 \end{array}$$

$$-10 < -9.7 < -9$$

$$-10 < \log_{10} \left(\frac{4}{5}\right)^{100} < -9$$

$$10^{-10} < \left(\frac{4}{5}\right)^{100} < 10^{-9}$$

よって

小数第10位

【桁数2】

14  $3^n$  が8桁の数となるような自然数  $n$  をすべて求めよ。ただし、 $\log_{10} 3 = 0.4771$  とする。

$$10^7 \leq 3^n < 10^8$$

$$\log_{10} 10^7 \leq \log_{10} 3^n < \log_{10} 10^8$$

$$7 \leq n \log_{10} 3 < 8$$

$$\frac{7}{\log_{10} 3} \leq n < \frac{8}{\log_{10} 3}$$

$$\frac{7}{0.4771} \leq n < \frac{8}{0.4771}$$

$$\begin{array}{r} 14.6 \\ 0.4771 \overline{) 70000} \\ \underline{4771} \phantom{00} \\ 22290 \\ \underline{19084} \phantom{0} \\ 32060 \\ \underline{28626} \phantom{0} \\ 3434 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16.7 \\ 0.4771 \overline{) 80000} \\ \underline{4771} \phantom{00} \\ 32290 \\ \underline{28626} \phantom{0} \\ 36640 \\ \underline{33397} \phantom{0} \\ 3243 \end{array}$$

$$14.6 \leq n < 16.7$$

よって  $\underline{n = 15, 16}$