【平均変化率】

1 次の平均変化率を求めよ。

(1) 1次関数 $y=-3x+1$ の $x=0$ から $x=3$ までの平均変化率

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{-8-1}{3}=\frac{-9}{3}=-3$$

(2) 1次関数 $y=2x$ の，$x=a$ から $x=b$ までの平均変化率

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{2b-2a}{b-a}=\frac{2(b-a)}{b-a}=2$$

(3) 2次関数 $y=-x^2$ の，$x=2$ から $x=2+h$ までの平均変化率

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2}=\frac{-(2+h)^2-(-2^2)}{h}$$

$$=\frac{-4-4h-h^2+4}{h}$$

$$=\frac{-4h-h^2}{h}=-4-h$$

【微分係数】

2 定義に従って，次の微分係数を求めよ。

(1) $f(x)=2x-3$ $(x=0)$

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2h-3-(-3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2h}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}2=2$$

(2) $f(x)=x^2$ $(x=1)$

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1+2h+h^2-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(2+h)=2$$

【導関数】

3 次の関数を定義に従って微分せよ。

(1) $f(x)=3x$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{3(x+h)-3x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{3h}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}3=3$$

(2) $f(x)=-x^2$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-(x+h)^2-(-x^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-x^2-2hx-h^2+x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-2hx-h^2}{h}=\lim_{h\to0}(-2x-h)=-2x$$

【導関数の計算】

4 次の関数を微分せよ。

(1) $y=4x^3-2x^2-5x$

$y'=12x^2-4x-5$

(2) $y=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}$

$y'=-\frac{3}{2}x^2+3x$

(3) $y=x(x+2)(x-2)$

$=x(x^2-4)$

$=x^3-4x$

$y'=3x^2-4$

(4) $y=3(x^2-2)^2$

$=3(x^4-4x^2+4)$

$=3x^4-12x^2+12$

$y'=12x^3-24x$

【いろいろな文字による微分】

5 次の関数を［ ］内の文字で微分せよ。

(1) $s=3t^2-4t+2$ ［t］

$s'=6t-4$

(2) $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ ［r］

$V'=4\pi r^2$

【微分係数を用いた関数の決定】

6 次の条件をすべて満たす2次関数 $f(x)$ を求めよ。

$f'(0)=-3$，$f'(1)=1$，$f(0)=2$

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと

$f'(x)=2ax+b$

$f'(0)=-3$ より

$f'(0)=b=-3$ —①

$f'(1)=1$ より

$f'(1)=2a+b=1$ —②

$f(0)=2$ より

$f(0)=c=2$ —③

①を②に代入

$2a=4$

$a=2$

よって $f(x)=2x^2-3x+2$

【曲線上の点における接線の方程式】

$\boxed{7}$ 関数 $y=2x^2-4x+3$ のグラフ上に点 A (2, 3) をとる。

(1) 点 A における接線の傾きを求めよ。

$f'(x) = 4x-4$

$f'(2) = 8-4$

$= 4$

(2) 点 A における接線の方程式を求めよ。

$y-3 = 4(x-2)$

$y = 4x-8+3$

$y = 4x-5$

【曲線上にない点から引いた接線の方程式】

$\boxed{8}$ 関数 $y=x^2-2x+4$ のグラフに原点 O から引いた接線の方程式を求めよ。

接点 $(t,\ t^2-2t+4)$ とおく

傾きは

$f'(x) = 2x-2$

$f'(t) = 2t-2$

接線の方程式は

$y-(t^2-2t+4) = (2t-2)(x-t)$

$y = (2t-2)x - t(2t-2) + (t^2-2t+4)$

$y = (2t-2)x - t^2+4$

$(0, 0)$ を通るので

$0 = -t^2+4$

$t^2 = 4$

$t = \pm 2$

よって

$t=2$ のとき $y=2x$

$t=-2$ のとき $y=-2x$

【関数の増減】

$\boxed{9}$ 次の関数の増減を調べよ。

(1) $f(x)=x^3-6x^2+5$

$f'(x) = 3x^2-12x$

$f'(x) = 0$ のとき

$x^2-4x = 0$

$x(x-4) = 0$

$x = 0, 4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	5	↘	−27	↗

(2) $f(x)=-x^3$

$f'(x) = -2x^2$

$f'(x) = 0$ のとき

$-2x^2 = 0$

$x^2 = 0$

$x = 0$ (重解)

x	$\cdots$	0	$\cdots$
f'	−	0	−
f	↘	0	↘

【関数の増減とグラフ】

$\boxed{10}$ 次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=x^3-6x^2+9x$

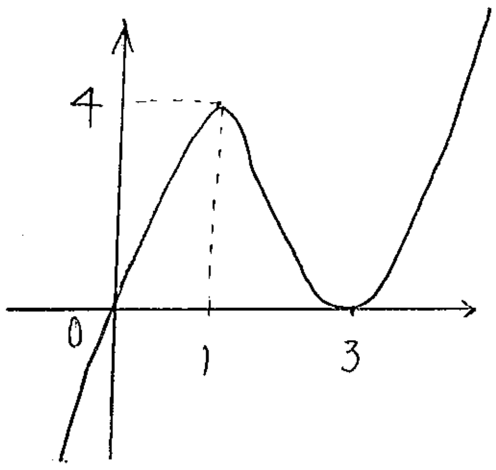
$y' = 3x^2-12x+9$

$y' = 0$ のとき

$x^2-4x+3 = 0$

$(x-3)(x-1) = 0$

$x = 1, 3$



x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	4	↘	0	↗

極大値 4 $(x=1)$

極小値 0 $(x=3)$

(2) $y=-x^3+3x^2+1$

$y' = -3x^2+6x$

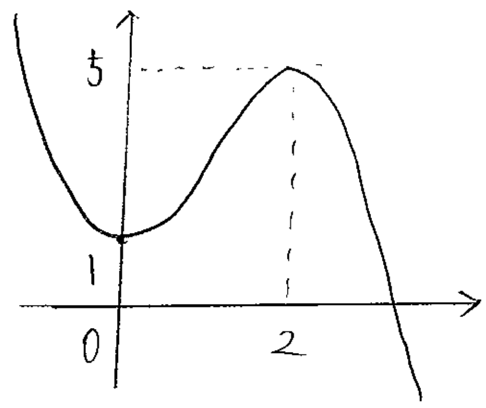
$y' = 0$ のとき

$-3x^2+6x = 0$

$x^2-2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x = 0, 2$



x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	−	0	+	0	−
y	↘	1	↗	5	↘

極大値 5 $(x=2)$

極小値 1 $(x=0)$

(3) $y=x^3-3x^2+3x+5$

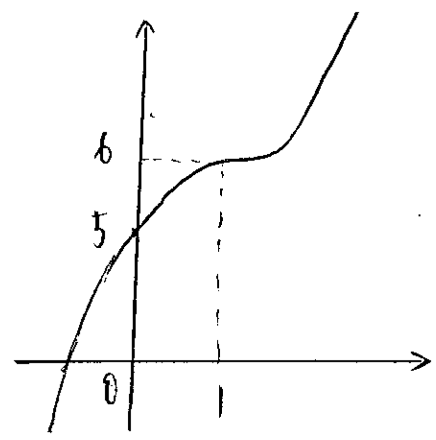
$y' = 3x^2-6x+3$

$y' = 0$ のとき

$x^2-2x+1 = 0$

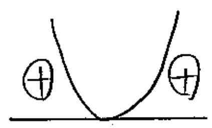
$(x-1)^2 = 0$

$x = 1$ (重解)



x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	+	0	+
y	↗	6	↗

極値なし



【4 次関数のグラフ】

$\boxed{11}$ 次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=x^4-8x^2+2$

$y'=4x^3-16x$

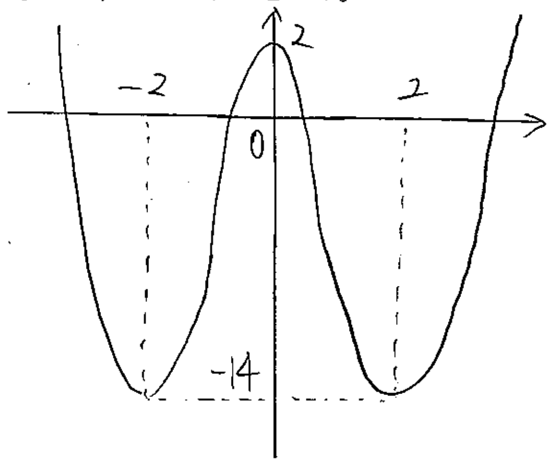
$y'=0$ のとき

$x^3-4x=0$

$x(x^2-4)=0$

$x(x+2)(x-2)=0$

$x=-2,\ 0,\ 2$



x	…	-2	…	0	…	2	…
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↘	-14	↗	2	↘	-14	↗

極大値 0 $(x=0)$

極小値 -14 $(x=\pm2)$ //

(2) $y=3x^4-4x^3-12$

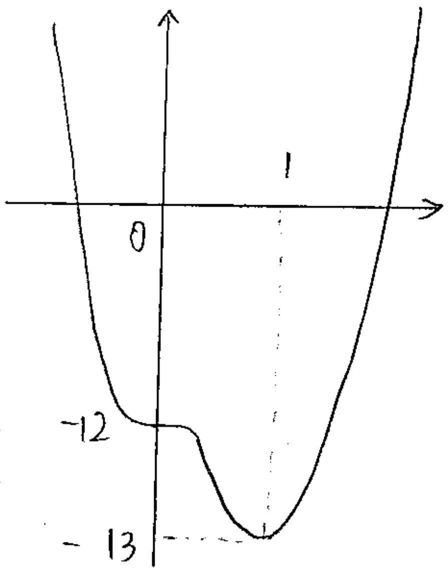
$y'=12x^3-12x^2$

$y'=0$ のとき

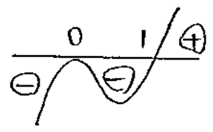
$x^3-x^2=0$

$x^2(x-1)=0$

$x=0$ (重解), 1



x	…	0	…	1	…
f'	$-$	0	$-$	0	$+$
f	↘	-12	↘	-13	↗



極大値 なし

極小値 -13 $(x=1)$ //

【関数の最大･最小】

$\boxed{12}$ 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $y=x^3+3x^2$ $(-3\leqq x\leqq 2)$

$y'=3x^2+6x$

$y'=0$ のとき

$x^2+2x=0$

$x(x+2)=0$

$x=-2,\ 0$

x	-3	…	-2	…	0	…	2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	4	↘	0	↗	20

Max 20 $(x=2)$

min 0 $(x=-3,0)$ //

(2) $y=-2x^3+3x^2+12x-3$ $(-2\leqq x\leqq 1)$

$y'=-6x^2+6x+12$

$y'=0$ のとき

$6x^2-6x-12=0$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=-1,\ 2$

x	…	-1	…	2	…
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘		↗		↘

x	-2	…	-1	…	1
y'		$-$	0	$+$	
y	1	↘	-10	↗	10

Max 10 $(x=1)$

min -10 $(x=-1)$ //

【極値と関数の決定】

$\boxed{13}$ 関数 $f(x)=x^3+ax^2-9x+b$ が $x=-1$ で極大値 8 をとるとき，定数 a，b の値を求めよ。また，極小値を求めよ。

x	…	-1	…
f'	$+$	0	$-$
f	↗	8	↘

$f'(-1)=0$

$f(-1)=8$

$f(-1)=8$ より

$f(-1)=-1+a+9+b$

$=a+b+8=8$

$a+b=0$ —①

$f'(-1)=0$ より

$f'(x)=3x^2+2ax-9$

$f'(-1)=3-2a-9$

$=-2a-6=0$

$2a+6=0$

$a=-3$ —②

①② より

$a=-3,\ b=3$ //

$f(x)=x^3-3x^2-9x+3$

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$f'(x)=0$ のとき

$3x^2-6x-9=0$

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

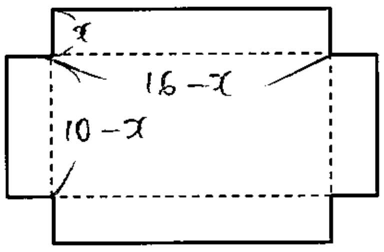
$x=-1,\ 3$

x	…	-1	…	3	…
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗	8	↘	-24	↗

極小値 -24 $(x=3)$ //

【図形の最大･最小】

$\boxed{14}$ 縦 10 cm，横 16 cm の長方形の厚紙の四隅から，同じ大きさの正方形を右の図のように切り取って，ふたのない箱を作る。箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の1辺の長さを何 cm にすればよいか。



1辺の長さ　x cm

容積　y　とすると

$$\begin{cases} x > 0 \\ 16 - x > 0 \\ 10 - x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < 16 \\ x < 10 \end{cases} \quad 0 < x < 10$$

$y = (10 - x)(16 - x)x$

$= (160 - 32x - 20x + 4x^2)x$

$= (160 - 52x + 4x^2)x$

$= 4x^3 - 52x^2 + 160x$

$y' = 12x^2 - 104x + 160$

$y' = 0$ のとき

$12x^2 - 104x + 160 = 0$

$3x^2 - 26x + 40 = 0$

$(3x - 20)(x - 2) = 0$

$x = 2$，$\cancel{\frac{20}{3}}$ 不適

0			10		
…	2	…		$\frac{20}{3}$	…
+	0	−		0	+
↗		↘			↗

x	0	…	2	…	10
y'		+	0	−	
y		↗	Max	↘	

よって　2 cm

【実数解の個数[1]】

$\boxed{15}$ 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$2x^3 - 6x + 3 = 0$

$f(x) = 2x^3 - 6x + 3$

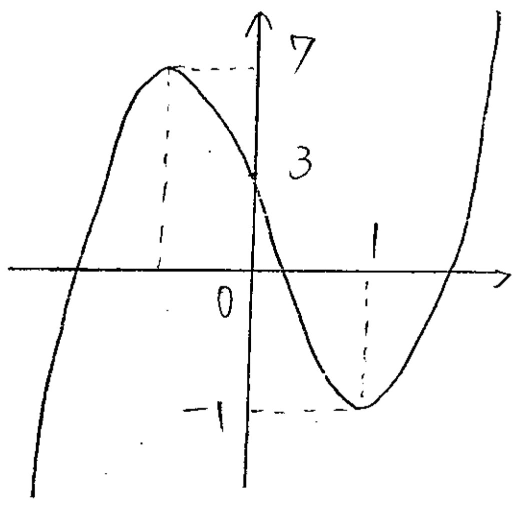
$f'(x) = 6x^2 - 6$

$f'(x) = 0$ のとき

$x^2 - 1 = 0$

$(x + 1)(x - 1) = 0$

$x = -1,\ 1$



x	…	−1	…	1	…
f'	+	0	−	0	+
f	↗	7	↘	−1	↗

よって　3コ

(2)　$-x^4 + 4x^3 - 4x^2 = 0$

$f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2$

$f'(x) = 0$ のとき

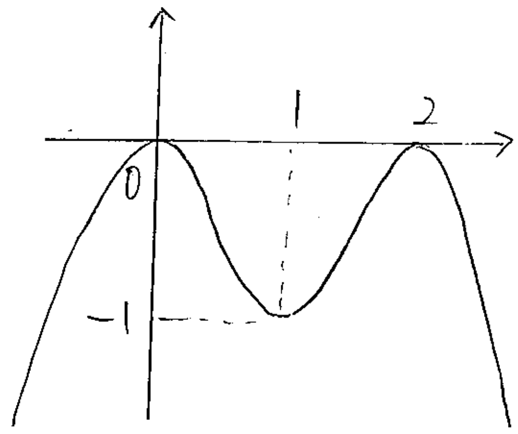
$-4x^3 + 12x^2 - 8x = 0$

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$x(x - 2)(x - 1) = 0$

$x = 0,\ 1,\ 2$



x	…	0	…	1	…	2	…
f'	+	0	−	0	+	0	−
f	↗	0	↘	−1	↗	0	↘

よって　2コ

【実数解の個数[2]】

$\boxed{16}$ 方程式 $2x^3 - 3x^2 - a = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$2x^3 - 3x^2 = a$

$f(x) = 2x^3 - 3x^2$

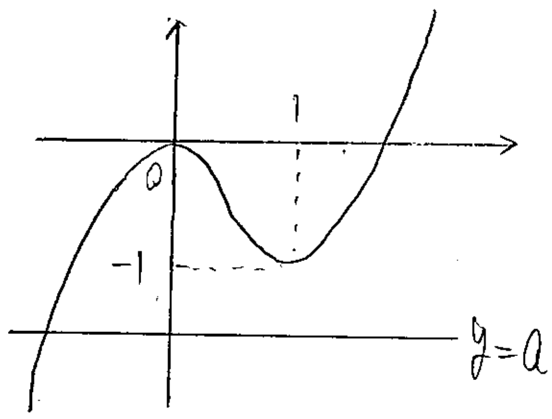
$f'(x) = 6x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$ のとき

$x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0$

$x = 0,\ 1$



x	…	0	…	1	…
f'	+	0	−	0	+
f	↗	0	↘	−1	↗

$0 < a$ のとき　1コ

$a = 0$ のとき　2コ

$-1 < a < 0$ のとき　3コ

$a = -1$ のとき　2コ

$a < -1$ のとき　1コ

【不等式の証明】

$\boxed{17}$ $x \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$x^3 + 3x^2 + 5 \geqq 9x$

(左辺) − (右辺) $\geqq 0$ を示す

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$f'(x) = 0$ のとき

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x + 3)(x - 1) = 0$

$x = -3,\ 1$

0

x	…	−3	…	1	…
f'	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

x	0	…	1	…
f'		−	0	+
f	5	↘	0	↗

Min 0 ($x = 1$) より

(左辺) $\geqq$ (右辺)

等号成立 は $x = 1$