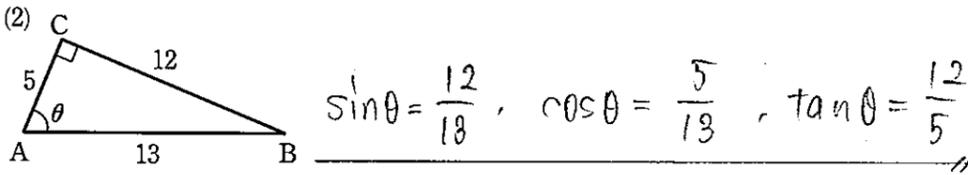
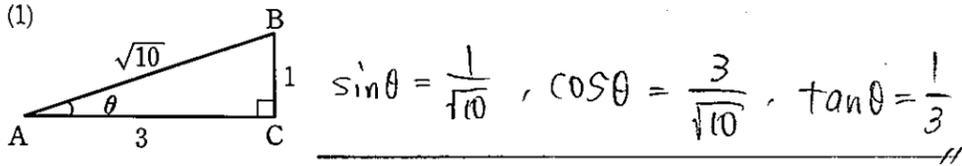
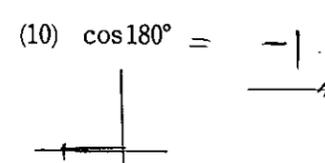
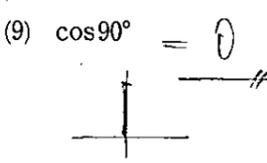
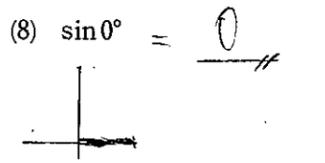
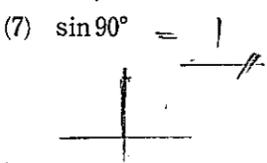
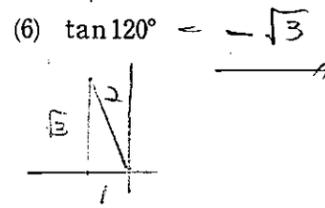
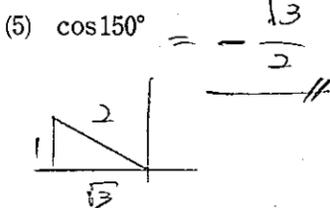
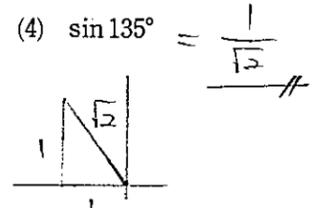
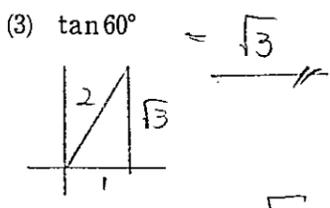
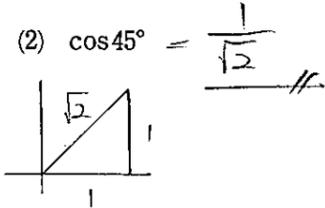
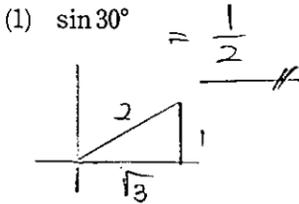


【三角比】

1 下の図において、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を、それぞれ求めよ。



2 次の値を求めよ。



【三角比の応用】

3 傾斜角 19° の坂をまっすぐに 100 m 登るとき、鉛直方向には何 m 登ったことになるか。1 m 未満を四捨五入して求めよ。ただし、 $\sin 19^\circ = 0.3256$, $\cos 19^\circ = 0.9455$, $\tan 19^\circ = 0.3443$ とする。

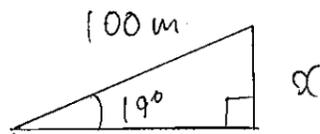
$$\sin 19^\circ = \frac{x}{100}$$

$$x = \sin 19^\circ \times 100$$

$$= 0.3256 \times 100$$

$$= 32.56$$

よって $\underline{33 \text{ m}}$



4 木の根もとから 10 m 離れた地点に立って木の先端を見上げると、水平面とのなす角が 21° であった。目の高さを 1.6 m として、木の高さを求めよ。ただし、 $\sin 21^\circ = 0.3584$, $\cos 21^\circ = 0.9336$, $\tan 21^\circ = 0.3839$ とする。

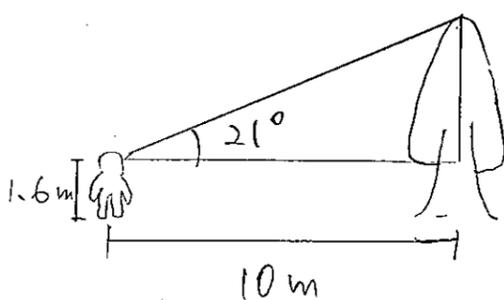
$$\tan 21^\circ = \frac{x}{10}$$

$$x = \tan 21^\circ \times 10$$

$$= 0.3839 \times 10$$

$$= 3.839$$

$$\approx 3.8$$



よって $\underline{1.6 + 3.8 = 5.4 \text{ (m)}}$

【 $90^\circ - \theta$, $180^\circ - \theta$ の三角比と式の値】

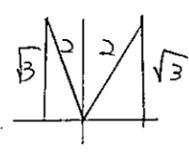
5 次の式の値を求めよ。

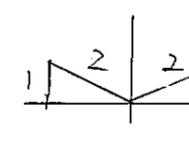
(1) $\sin 70^\circ + \cos 100^\circ + \sin 170^\circ + \cos 160^\circ$
 $= \cos 20^\circ - \cos 80^\circ + \sin 10^\circ + \cos 20^\circ$
 $= \cos 20^\circ - \sin 10^\circ + \sin 10^\circ + \cos 20^\circ$
 $= 0$

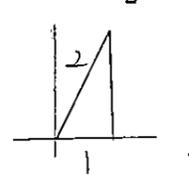
(2) $\sin 140^\circ \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \sin 50^\circ$
 $= \sin 40^\circ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \cos 40^\circ$
 $= \sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ$
 $= 1$

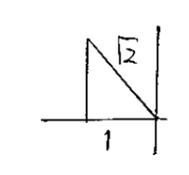
【三角比を含む方程式】

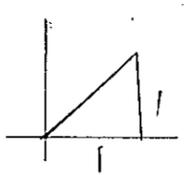
6 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次のような θ を求めよ。

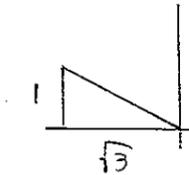
(1) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\theta = 60^\circ, 120^\circ$


(2) $\sin \theta = \frac{1}{2}$ $\theta = 30^\circ, 150^\circ$


(3) $\cos \theta = \frac{1}{2}$ $\theta = 60^\circ$


(4) $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\theta = 135^\circ$


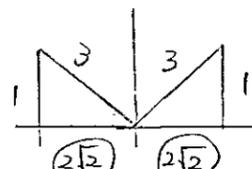
(5) $\tan \theta = 1$ $\theta = 45^\circ$


(6) $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\theta = 150^\circ$


【三角比の相互関係】

7 次の問いに答えよ。

(1) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\sin \theta = \frac{1}{3}$ のとき、 $\cos \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ。

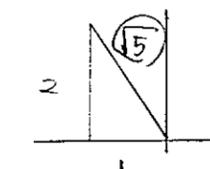
 $\cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\text{or } \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ $\tan \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$x^2 + 1 = 9$$

$$x^2 = 8$$

$$x = 2\sqrt{2}$$

(2) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\tan \theta = -2$ のとき、 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の値を求めよ。

 $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$x^2 = 1 + 4$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5}$$

三角比②

【tanθ と直線の傾き】

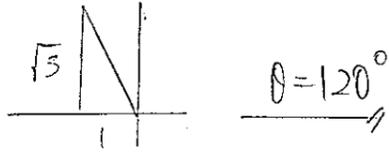
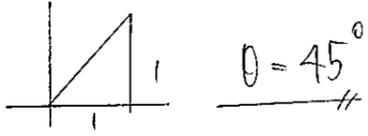
8 次の直線と x 軸の正の向きとのなす角 θ を求めよ。

(1) $y=x$

(2) $y=-\sqrt{3}x$

$\tan\theta = 1$

$\tan\theta = -\sqrt{3}$



【三角比の式の値】

9 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta \cos\theta$

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$

$2\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{4}$

$\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$

(2) $\sin\theta - \cos\theta$

$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 - 2\left(-\frac{3}{8}\right)$

$= \frac{7}{4}$

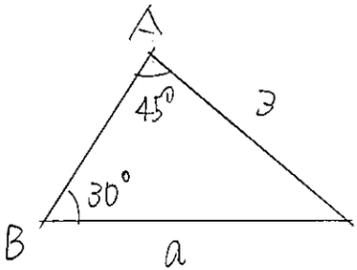
$\left(\sin\theta - \cos\theta = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

$\sin\theta > 0, \cos\theta < 0 \Rightarrow \sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$

【正弦定理】

10 $\triangle ABC$ において、次の値を求めよ。

(1) $A=45^\circ, B=30^\circ, b=3$ のとき、 a



$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{3}{\sin 30^\circ}$

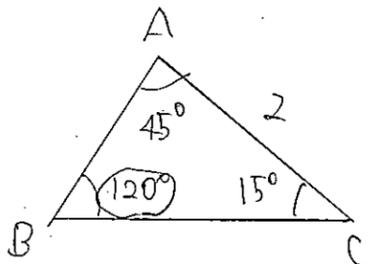
$\frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3}{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}a = \frac{3}{\frac{1}{2}}$

$a = \frac{6}{\frac{1}{2}}$

$a = 12$

(2) $A=45^\circ, C=15^\circ, b=2$ のとき、外接円の半径 R



$2R = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

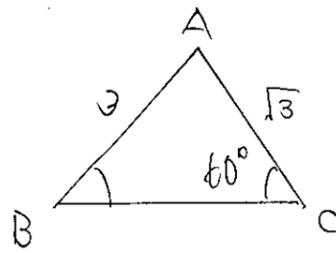
$2R = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$R = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$2R = \frac{2}{\sin 120^\circ}$

(3) $b=\sqrt{3}, c=3, C=60^\circ$ のとき、 B



$\frac{3}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin B}$

$\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sin B}$

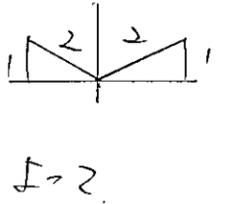
$3\sin B = \frac{3}{2}$

$\sin B = \frac{1}{2}$

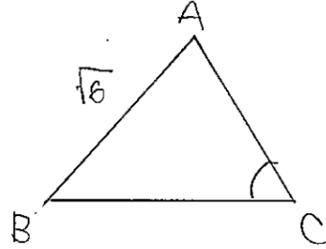
$B = 30^\circ, 150^\circ$

不適

$B = 30^\circ$



(4) $c=\sqrt{6}$, 外接円の半径 $R=\sqrt{3}$ のとき、 C



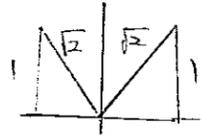
$2R = \frac{\sqrt{6}}{\sin C}$

$2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{\sin C}$

$\sin C = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

$\sin C = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2 \times \sqrt{2}}$

$\sin C = \frac{1}{\sqrt{2}}$

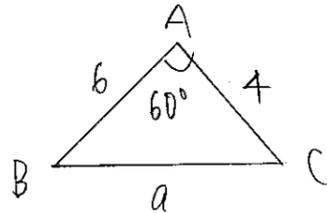


$C = 45^\circ, 135^\circ$

【余弦定理】

11 $\triangle ABC$ において、次の値を求めよ。

(1) $b=4, c=6, A=60^\circ$ のとき、 a



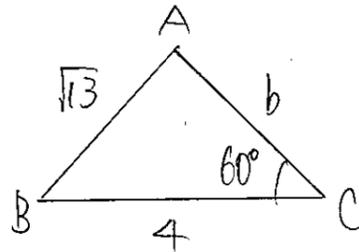
$a^2 = 36 + 16 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cos 60^\circ$

$a^2 = 52 - 24$

$a^2 = 28$

$a = 2\sqrt{7}$

(2) $a=4, c=\sqrt{13}, C=60^\circ$ のとき、 b



$13 = b^2 + 16 - 4b$

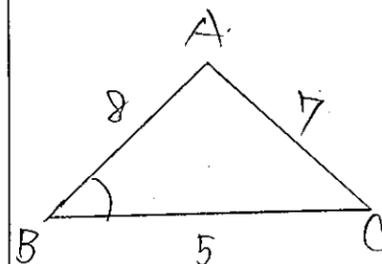
$b^2 - 4b + 3 = 0$

$(b-1)(b-3) = 0$

$b = 1, 3$

$13 = b^2 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot b \cos 60^\circ$

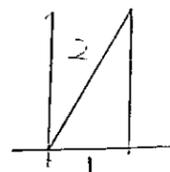
(3) $a=5, b=7, c=8$ のとき、 B



$\cos B = \frac{40}{80}$

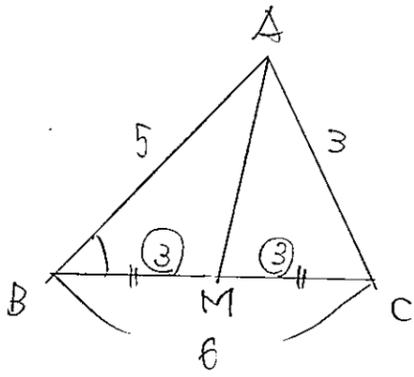
$\cos B = \frac{1}{2}$

$\cos B = \frac{64 + 25 - 49}{2 \cdot 8 \cdot 5}$



$B = 60^\circ$

12 △ABCにおいて、AB=5, AC=3, BC=6とする。辺BCの中点をMとするとき、AMの長さを求めよ。



△ABC において

$$\cos B = \frac{25 + 36 - 9}{2 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$= \frac{52}{60}$$

$$= \frac{13}{15}$$

△ABM において

$$AM^2 = 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos B$$

$$= 36 - 30 \cdot \frac{13}{15}$$

$$= 10$$

よって

$$AM = \sqrt{10}$$

【鋭角・直角・鈍角三角形の判定】

13 △ABCの3辺の長さが次のようなとき、角Aが鋭角、直角、鈍角のいずれであるかを調べよ。

(1) a=9, b=3√2, c=7

$$a^2 = 81, b^2 = 18, c^2 = 49$$

$$81 > 18 + 49 \text{ よって}$$

鈍角

(2) a=√7, b=√6, c=2

$$a^2 = 7, b^2 = 6, c^2 = 4$$

$$7 < 6 + 4 \text{ よって}$$

鋭角

【三角形の辺と角の決定】

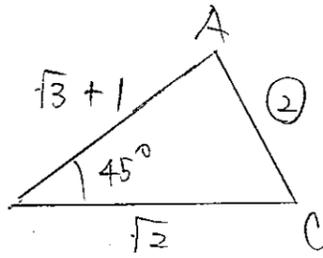
14 △ABCにおいて、a=√2, c=√3+1, B=45°のとき、残りの辺の長さや角の大きさを求めよ。

$$b^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2 \cdot \sqrt{2}(\sqrt{3}+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 2 + 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2$$

$$= 4$$

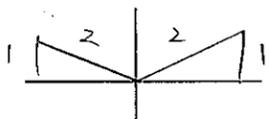
$$b = 2$$



$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin A}$$

$$2 \sin A = 1$$

$$\sin A = \frac{1}{2}$$



$$A = 30^\circ, 150^\circ$$

不適

$$C = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ$$

$$= 105^\circ$$

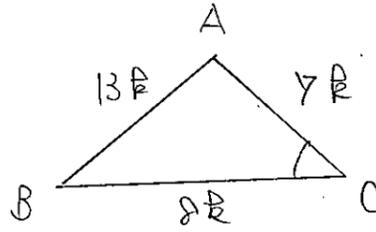
よって

$$b=2, A=30^\circ, C=105^\circ$$

15 △ABCにおいて次が成り立つとき、この三角形の最大の角の大きさを求めよ。

$$\sin A : \sin B : \sin C = 8 : 7 : 13$$

a=8k, b=7k, c=13k (k:整数) とすると



$$\cos C = \frac{49k^2 + 64k^2 - 169k^2}{2 \cdot 7k \cdot 8k}$$

$$= \frac{-56k^2}{112k^2} = -\frac{1}{2}$$

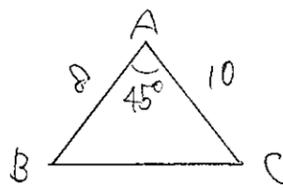
よって

$$C = 120^\circ$$

【三角形の面積】

16 次のような図形の面積Sを求めよ。

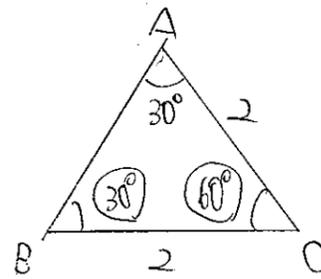
(1) b=10, c=8, A=45°である△ABC



$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \sin 45^\circ$$

$$= \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$$

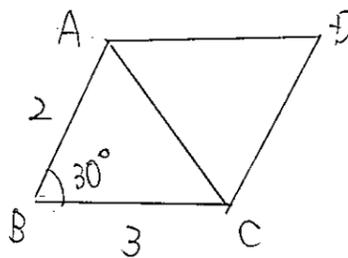
(2) a=b=2, A=30°である△ABC



$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin 30^\circ$$

$$= \sqrt{3}$$

(3) AB=2, BC=3, B=30°である平行四辺形ABCD

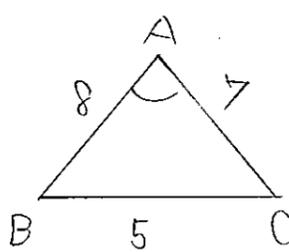


$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \sin 30^\circ$$

$$= 3$$

17 △ABCにおいて、a=5, b=7, c=8のとき、次のものを求めよ。

(1) cos A の値

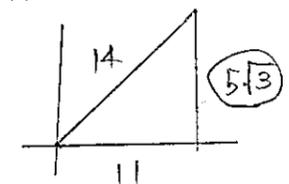


$$\cos A = \frac{64 + 49 - 25}{2 \cdot 8 \cdot 7}$$

$$= \frac{88}{112}$$

$$= \frac{11}{14}$$

(2) 面積S



$$x^2 + 11^2 = 14^2$$

$$x^2 = 196 - 121$$

$$= 75$$

$$x = 5\sqrt{3}$$

$$\sin A = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

よって

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

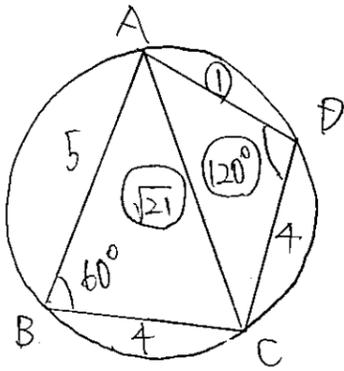
$$= 10\sqrt{3}$$

三角比④

【円に内接する四角形の面積】

18 円に内接する四角形 ABCD があり、
 $AB=5, BC=4, CD=4, \angle B=60^\circ$
 であるとき、次のものを求めよ。

(1) AC の長さ



$$AC^2 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 41 - 20$$

$$= 21$$

$$AC = \sqrt{21}$$

(2) AD の長さ

$$21 = x^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cos 120^\circ$$

$$21 = x^2 + 16 - 8x \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$21 = x^2 + 16 + 4x$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x+5)(x-1) = 0$$

$$x = 1, \quad \text{不適}$$

∴ $x = 2$
 $AD = 1$

(3) 四角形 ABCD の面積を求めよ。

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 5\sqrt{3}$$

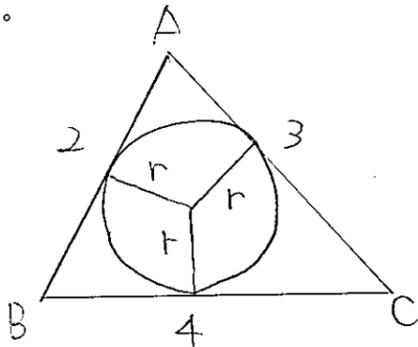
$$\Delta ADC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3}$$

∴ $\square ABCD = \Delta ABC + \Delta ADC$
 $= 5\sqrt{3} + \sqrt{3}$
 $= 6\sqrt{3}$

【三角形の内接円の半径と面積】

19 ΔABC において、 $a=4, b=3, c=2$ のとき、この三角形の内接円の半径 r を求めよ。



⑮ $x^2 + 1 = 16$
 $x^2 = 15$
 $x = \sqrt{15}$

$$\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$= \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

$$S = \frac{1}{2} r (a+b+c)$$

面積 S を求める

$$\cos A = \frac{4+9-16}{2 \cdot 2 \cdot 3}$$

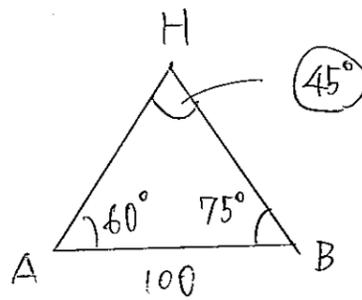
$$= \frac{-3}{12}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

∴ $\frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2} r (2+3+4)$
 $\frac{9}{2} r = \frac{3\sqrt{15}}{4}$
 $r = \frac{\sqrt{15}}{6}$

【空間図形への応用】

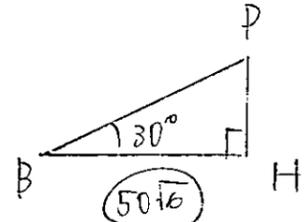
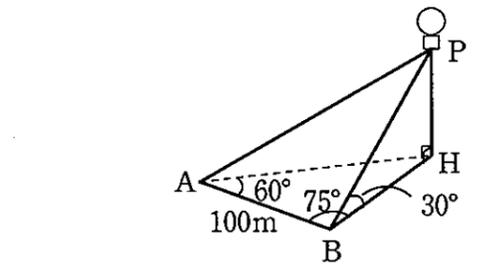
20 100 m 離れた 2 地点 A と B から、気球 P の真下の地点 H を見たとき、 $\angle HAB = 60^\circ, \angle HBA = 75^\circ$ であった。また、B から P を見上げた角度は 30° であった。図において、気球 P の高さ PH を求めよ。



$$\frac{HB}{\sin 60^\circ} = \frac{100}{\sin 45^\circ}$$

$$\frac{1}{2} HB = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$HB = 50\sqrt{6}$$



$$\tan 30^\circ = \frac{PH}{50\sqrt{6}}$$

$$PH = 50\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$PH = 50\sqrt{2} \text{ m}$$

21 $AB=3, AD=2, AE=1$ である直方体 ABCD-EFGH がある。

(1) $\cos \angle BED$ の値を求めよ。

$$DE^2 = 1^2 + 2^2$$

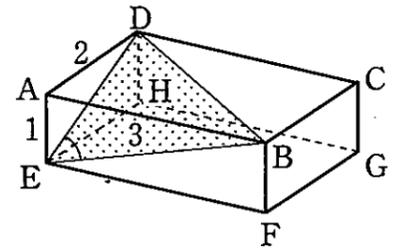
$$DE = \sqrt{5}$$

$$BE^2 = 1^2 + 3^2$$

$$BE = \sqrt{10}$$

$$BD^2 = 3^2 + 2^2$$

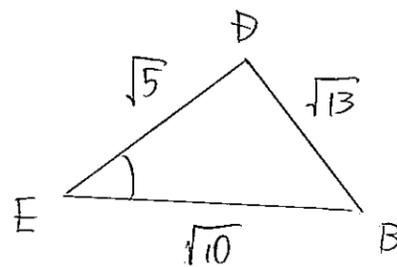
$$BD = \sqrt{13}$$



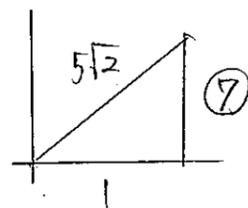
$$\cos \angle BED = \frac{5 + 10 - 13}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{50}}$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{2}}$$



(2) ΔBED の面積 S を求めよ。



$$\sin \angle BED = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

∴ $x = 7$

$$x^2 + 1^2 = (5\sqrt{2})^2$$

$$x^2 = 49$$

$$x = 7$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$= \frac{7}{2}$$