整数の性質①

【約数・倍数】

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1) 12の約数をすべて求めよ。

±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12 //

(2) 6の正の倍数を小さいものから5個求めよ。

6, 12, 18, 24, 30 //

【正の約数】

$\boxed{2}$ 次の数の正の約数をすべて求めよ。また，正の約数の個数を求めよ。

(1) 60

2) 60
2) 30
3) 15
5

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$3 \times 2 \times 2 = 12$ 個 //

1	2	3	4	5	6
60	30	20	15	12	10

//

(2) 117

3) 117
3) 39
13

$117 = 3^2 \cdot 13$

$3 \cdot 2 = 6$ 個

	1	13
1	1	13
3	3	39
3^2	9	117

1, 3, 9, 13, 39, 117 //

【倍数であることの証明】

$\boxed{3}$ a，b は整数とする。次のことを証明せよ。

(1) a，b が5の倍数ならば，$a+b$ は5の倍数である。

$a = 5k$

$b = 5l$ （k，l：整数）

$a + b = 5k + 5l$

$= 5(k + l)$ （$k+l$：整数）

(2) a，$a+b$ が5の倍数ならば，b は5の倍数である。

$a = 5k$

$a + b = 5l$ ―― ① （k，l：整数）

①より

$b = 5l - a$

$= 5l - 5k$

$= 5(l - k)$ （$l-k$：整数）

【倍数の判定法】

$\boxed{4}$ 次の数は，2，3，4，5，6，8，9のうち，どの数の倍数になるか答えよ。

(1) 1240

2, 4, 5, 8 //

(2) 4158

2, 3, 6, 9 //

$\boxed{5}$ 一の位の数がわからない4桁の自然数123□が，5の倍数であり，3の倍数でもあるとき，一の位の数を求めよ。

5の倍数より　1230，1235

① 1230 のとき　$1+2+3+0 = 6$

② 1235 のとき　$1+2+3+5 = 16$

よって　1230 //

【素因数分解と平方根】

$\boxed{6}$ 次の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{168n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

2) 168
2) 84
2) 42
3) 21
7

$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

$\sqrt{2^3 \cdot 3 \cdot 7 \times n}$ を

$\sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2}$ にするには　$n = 2 \cdot 3 \cdot 7$

$= 42$ //

(2) $\sqrt{\dfrac{280}{n}}$ が自然数となるような最小の自然数 n を求めよ。

2) 280
2) 140
2) 70
5) 35
7

$280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$

$\sqrt{\dfrac{2^3 \cdot 5 \cdot 7}{n}}$ を

$\sqrt{2^2}$ にするには　$n = 2 \cdot 5 \cdot 7$

$= 70$ //

【等式を満たす整数 x，y の組】

$\boxed{7}$ 次の関係を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

(1) $xy + 2x = 3$

$x(y + 2) = 3$

x	1	3	−1	−3
$y+2$	3	1	−3	−1

x	1	3	−1	−3
y	1	−1	−5	−3

$(x, y) = (1, 1), (3, -1), (-1, -5), (-3, -3)$ //

(2) $xy - 3x + y = 1$

$x(y - 3) + (y - 3) + 3 = 1$

$(x + 1)(y - 3) = -2$

$x+1$	1	−1	−2	2
$y-3$	−2	2	1	−1

x	0	−2	−3	1
y	1	5	4	2

$(x, y) = (0, 1), (-2, 5), (-3, 4), (1, 2)$ //

【最大公約数と最小公倍数】

$\boxed{8}$ 次の整数の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1) 60，72

2) 60
2) 30
3) 15
5

2) 72
2) 36
2) 18
3) 9
3

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$72 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot$ X

最大公約数　$2^2 \cdot 3 = 12$

最小公倍数　$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$ //

(2) 378，840

2) 378
3) 189
3) 63
3) 21
7

2) 840
2) 420
2) 210
3) 105
5) 35
7

$378 = 2 \cdot 3^3 \cdot$ X $\cdot 7$

$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

最大公約数　$2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ //

最小公倍数　$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

$= 7560$ //

(3) 28，84，180

2) 28
2) 14
7

2) 84
2) 42
3) 21
7

2) 180
2) 90
3) 45
3) 15
5

$28 = 2^2 \cdot$ X $\cdot$ X $\cdot 7$

$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot$ X $\cdot 7$

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot$ X

最大公約数　$2^2 = 4$ //

最小公倍数　$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$ //

9 n は正の整数とする。n と 18 の最小公倍数が 180 であるような n をすべて求めよ。

$18 = 2 \cdot 3^2 \cdot \times$

$n = 2^2 \cdot \begin{array}{c}\times\\ 3\\ 2^2\end{array} \cdot 5$

$2\,)\,18$, $3\,)\,9$, 3

$2\,)\,180$, $2\,)\,90$, $3\,)\,45$, $3\,)\,15$, 5

最小公倍数 $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

よって

$n = 2^2 \cdot 5 = 20$

$n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

$n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

$n = 20,\ 60,\ 180$

10 a は自然数とする。$a+1$ は 5 の倍数であり，$a+2$ は 9 の倍数であるとき，$a+11$ は 45 の倍数であることを証明せよ。

$a+1 = 5k$

$a+2 = 9l$

$a+11 = a+1+10$
$= 5k+10$
$= 5(k+2)$ （$k+2$：整数）

$a+11 = a+2+9$
$= 9l+9$
$= 9(l+1)$ （$l+1$：整数）

5と9は互いに素なので $a+11$ は45の倍数

【除法の性質】

11 a，b は整数とする。a を 5 で割ると 3 余り，b を 5 で割ると 4 余る。次の数を 5 で割ったときの余りを求めよ。

$a = 5k+3$

$b = 5l+4$ （k，l：整数）

(1) $2a+3b$

$= 2(5k+3)+3(5l+4)$

$= 10k+6+15l+12$

$= 10k+15l+18$

$= 10k+15l+15+3$

$= 5(2k+3l+3)+3$

よって 3

(2) ab

$= (5k+3)(5l+4)$

$= 25kl+20k+15l+12$

$= 25kl+20k+15l+10+2$

$= 5(5kl+4k+3l+2)+2$

よって 2

【最大公約数と最小公倍数からの２数の決定】

12 最大公約数が 15，最小公倍数が 180 である 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

$a = 15m$ —①

$b = 15n$ —②

$180 = 15mn$ —③

a, b の最大公約数が ●
最小公倍数が △
$a = ●m$
$b = ●n$ 注 m, n は互いに素
$△ = ●mn$

③より

$mn = 12$

m	1	~~2~~	3
n	12	~~6~~	4

$m < n$

m, n は互いに素

よって

$(m, n) = (1, 12),\ (3, 4)$

①②に代入

$(a, b) = (15, 180),\ (45, 60)$

【倍数であることの証明】

13 次のことを証明せよ。

連続する 2 つの偶数の 2 乗の和から 4 を引いた数は，16 の倍数である。

$2k$，$2k+2$ とする （k：整数）

$(2k)^2+(2k+2)^2-4$

$= 4k^2+4k^2+8k+4-4$

$= 8k^2+8k$

$= 8(k^2+k)$

$= 8k(k+1)$

$k(k+1)$ は 2 の倍数なので

$8k(k+1)$ は 16 の倍数

【剰余類】

14 n は整数とする。次のことを証明せよ。

n^2 を 3 で割ったときの余りは，2 ではない。

[1] $n = 3k$ のとき

$n^2 = 9k^2$
$= 3(3k^2)$

[2] $n = 3k+1$ のとき

$n^2 = (3k+1)^2$
$= 9k^2+6k+1$
$= 3(3k^2+2k)+1$

[3] $n = 3k+2$ のとき

$n^2 = (3k+2)^2$
$= 9k^2+12k+4$
$= 9k^2+12k+3+1$
$= 3(3k^2+4k+1)+1$

よって 3で割ったときの余りは2ではない

【ユークリッドの互除法】

15 次の2つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

(1) 629，259

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 2 \\ 37\,)\,111\,)\,259\,)\,629 \\ 111 \quad 222 \quad 518 \\ \hline 0 \quad 37 \quad 111 \end{array}$$

$\underline{37}$

(2) 841，377

$$\begin{array}{r} 3 \quad 4 \quad 2 \\ 29\,)\,87\,)\,377\,)\,841 \\ 87 \quad 348 \quad 754 \\ \hline 0 \quad 29 \quad 87 \end{array}$$

$\underline{29}$

【1次不定方程式】

16 次の等式を満たす整数 x，y の組を1つ求めよ。

(1) $13x+8y=7$

	1	2	3	4
13	13	26	39	52
8	8	16	24	32

$\underline{x=3,\ y=-4}$

(2) $7x-5y=1$

	1	2	3	4
7	7	14	21	28
5	5	10	15	20

$\underline{x=3,\ y=4}$

(3) $4x-7y=5$

	1	2	3	4
4	4	8	12	16
7	7	14	21	28

$4(2)-7(1)=1$

$4(10)-7(5)=5$

$\underline{x=10,\ y=5}$

(4) $130x+31y=1$

$$\begin{array}{r} -5 \quad 21 \\ 1 \quad -5 \quad -4 \\ 6\,)\,31\,)\,130 \\ 30 \quad 124 \\ \hline 1 \quad 6 \end{array}$$

$\underline{x=-5,\ y=21}$

(5) $35x+109y=1$

$$\begin{array}{r} 9 \quad -28 \\ -1 \quad 9 \\ 1 \quad -1 \quad -8 \quad -3 \\ 3\,)\,4\,)\,35\,)\,109 \\ 3 \quad 32 \quad 105 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 4 \end{array}$$

$\underline{x=-28,\ y=9}$

(6) $33x+14y=3$

$$\begin{array}{r} 3 \quad -7 \\ -1 \quad 3 \\ 1 \quad -1 \quad -2 \quad -2 \\ 4\,)\,5\,)\,14\,)\,33 \\ 4 \quad 10 \quad 28 \\ \hline 1 \quad 4 \quad 5 \end{array}$$

$33(3)+14(-7)=1$

$33(9)+14(-21)=3$

$\underline{x=9,\ y=-21}$

(7) $61x-27y=8$

$$\begin{array}{r} 4 \quad -9 \\ -1 \quad 4 \\ 1 \quad -1 \quad -3 \quad -2 \\ 6\,)\,7\,)\,27\,)\,61 \\ 6 \quad 21 \quad 54 \\ \hline 1 \quad 6 \quad 7 \end{array}$$

$61(4)+27(-9)=1$

$61(4)-27(9)=1$

$61(32)-27(72)=8$

$\underline{x=32,\ y=72}$

(8) $19x-24y=3$

$$\begin{array}{r} 4 \quad -5 \\ -1 \quad 4 \\ 1 \quad -1 \quad -3 \quad -1 \\ 4\,)\,5\,)\,19\,)\,24 \\ 4 \quad 15 \quad 19 \\ \hline 1 \quad 4 \quad 5 \end{array}$$

$19(-5)+24(4)=1$

$19(-5)-24(-4)=1$

$19(-15)-24(-12)=3$

$\underline{x=-15,\ y=-12}$

17 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $5x-7y=1$ —①

$5(3)-7(2)=1$ —②

①−②

$5(x-3)-7(y-2)=0$

5と7は互いに素なので

$x-3=7k$ （k：整数）

$y-2=5k$

よって

$x=7k+3$

$\underline{y=5k+2}$

(2) $34x+29y=3$

$$\begin{array}{r} 6 \quad -7 \\ -1 \quad 6 \\ 1 \quad -1 \quad -5 \quad -1 \\ 4\,)\,5\,)\,29\,)\,34 \\ 4 \quad 25 \quad 29 \\ \hline 1 \quad 4 \quad 5 \end{array}$$

$34(6)+29(-7)=1$

$34(18)+29(-21)=3$

①−②

$34(x-18)+29(y+21)=0$

34と29は互いに素なので

$x-18=29k$ （k：整数）

$y+21=-34k$

よって

$x=29k+18$

$\underline{y=-34k-21}$

【1次不定方程式の応用】

18 17で割ると7余り，12で割ると10余るような自然数のうち，4桁で最小のものを求めよ。

$17x+7$　　$12y+10$

$N=17x+7$

$N=12y+10$ とおく

$$\begin{array}{r} 5 \quad -7 \\ -2 \quad 5 \\ 1 \quad -2 \quad -2 \quad -1 \\ 2\,)\,5\,)\,12\,)\,17 \\ 4 \quad 10 \quad 12 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 5 \end{array}$$

$17x+7=12y+10$

$17x-12y=3$ —①

$17(5)+12(-7)=1$

$17(15)-12(21)=3$ —②

①−②

$17(x-15)-12(y-21)=0$

17と12は互いに素なので

$x-15=12k$ （k：整数）

$y-21=17k$

$x=12k+15$

$y=17k+21$

$N=17(12k+15)+7$

$=204k+255+7$

$=204k+262$

$k=4$ のとき　$\underline{1078}$

19 次の等式を満たす自然数 x, y の組をすべて求めよ。

$5x+2y=30$ —①

$5(4)+2(5)=30$ —②

①−②

$5(x-4)+2(y-5)=0$

5と2は互いに素なので

$x-4=2k$ （k：整数）

$y-5=5k$

$x=2k+4 \geqq 1$ —③

$y=-5k+5 \geqq 1$ —④

③より

$2k \geqq -3$

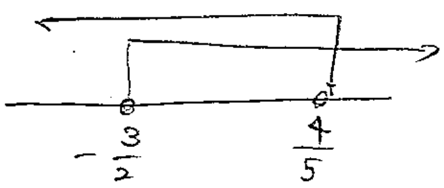
$k \geqq -\frac{3}{2}$ —⑤

④より

$-5k \geqq -4$

$k \leqq \frac{4}{5}$ —⑥

⑤⑥より



$-\frac{3}{2} \leqq k \leqq \frac{4}{5}$

$-1.5 \leqq k \leqq 0.8$

$k=-1,\ 0$

③④に代入

$(x,y)=(2,10),(4,5)$

【循環小数】

20 次の分数を小数で直せ。循環小数は，$0.\dot{3}$ のような表し方で書け。

(1) $\frac{7}{6}$

$6\overline{)7}$ = 1.166
6
10
6
40
36
40
36
4

$1.1\dot{6}$

(2) $\frac{74}{33}$

$33\overline{)74}$ = 2.242
66
80
66
140
132
80

$2.\dot{2}\dot{4}$

21 分数 $\frac{9}{13}$ を小数で表したとき，小数第 100 位の数字を求めよ。

$13\overline{)90}$ = 0.6923076
78
120
117
30
26
40
39
100
91
90

$\frac{9}{13}=0.\dot{6}9230\dot{7}$

$6\overline{)100}$ = 16
6
40
36
4

$100=16 \cdot 6+4$

よって 3

22 次の分数のうち，有限小数で表されるものをいえ。

$\frac{7}{4}$, $\frac{5}{33}$, $\frac{9}{40}$, $\frac{10}{52}$, $\frac{2}{55}$, $\frac{1}{125}$

【n 進法 ⇒ 10 進法】

23 次の数を 10 進法で表せ。

(1) $100100_{(2)}$

$2^2+2^5=34$

(2) $2012_{(3)}$

$2 \cdot 3^0+1 \cdot 3^1+2 \cdot 3^3$
$=2+3+27$
$=32$

(3) $1421_{(5)}$

$1 \cdot 5^0+2 \cdot 5^1+4 \cdot 5^2+1 \cdot 5^3$
$=1+10+100+125$
$=236$

(4) $106_{(7)}$

$6 \cdot 7^0+7^2$
$=6+49$
$=55$

24 次の数を 10 進法の小数で表せ。

(1) $0.0101_{(2)}$

$2^{-2}+2^{-4}$
$=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$
$=\frac{5}{16}$
$=0.3125$

(2) $0.432_{(5)}$

$4 \cdot 5^{-1}+3 \cdot 5^{-2}+2 \cdot 5^{-3}$
$=\frac{4}{5}+\frac{3}{25}+\frac{2}{125}$
$=\frac{100}{125}+\frac{15}{125}+\frac{2}{125}$
$=\frac{117}{125}$
$=0.936$

【10 進法 ⇒ n 進法】

25 次の 10 進数を[ ]内の表し方で表せ。

(1) 47 [2 進法]

2) 47
2) 23 … 1
2) 11 … 1
2) 5 … 1
2) 2 … 1
2) 1 … 0
0 … 1

$101111_{(2)}$

(2) 55 [2 進法]

2) 55
2) 27 … 1
2) 13 … 1
2) 6 … 1
2) 3 … 0
2) 1 … 1
0 … 1

$110111_{(2)}$

(3) 101 [3 進法]

3) 101
3) 33 … 2
3) 11 … 0
3) 3 … 2
3) 1 … 0
0 … 1

$10202_{(3)}$

(4) 634 [7 進法]

7) 634
7) 90 … 4
7) 12 … 6
7) 1 … 5
0 … 1

$1564_{(7)}$

26 次の 10 進数を[ ]内の表し方で表せ。

(1) 0.8125 [2 進法]

0.8125
× 2
1.6250
× 2
1.250
× 2
0.50
× 2
1.0

$0.1101_{(2)}$

(2) 0.7136 [5 進法]

0.7136
× 5
3.5680
× 5
2.840
× 5
4.20
× 5
1

$0.3241_{(5)}$