【空間座標】

$\boxed{1}$ xy 平面，zx 平面，y 軸，原点のそれぞれに関して，点 (1, −3, 2) と対称な点の座標を求めよ。

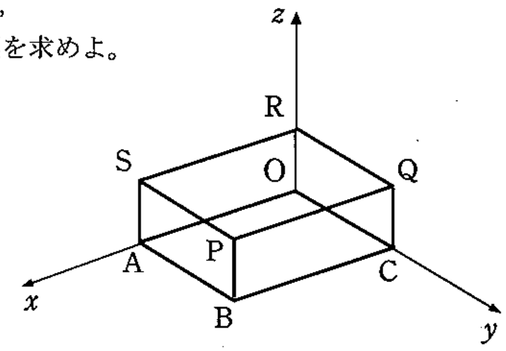
xy 平面　(1 , −3 , −2)

zx 平面　(1 , 3 , 2)

y 軸　(−1 , −3 , −2)

原点　(−1 , 3 , −2)

$\boxed{2}$ 右の図の直方体 OABC−RSPQ において，点 P の座標が (3, 2, 1) のとき，次の点の座標を求めよ。



B (3 , 2 , 0)

C (0 , 2 , 0)

Q (0 , 2 , 1)

R (0 , 0 , 1)

$\boxed{3}$ 原点 O と次の点の距離を求めよ。

(1) P(2, 3, 6)

$OP = \sqrt{4+9+36}$

$= \sqrt{49}$

$= 7$ //

(2) Q(3, 4, −5)

$OQ = \sqrt{9+16+25}$

$= \sqrt{50}$

$= 5\sqrt{2}$ //

$\boxed{4}$ 2 点 A(3, a, 1), B(1, 4, −3) が，原点 O から等距離にあるとき，a の値を求めよ。

$OA = \sqrt{9+a^2+1} = \sqrt{a^2+10}$

$OB = \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$

$OA = OB$

$\sqrt{a^2+10} = \sqrt{26}$

$a^2+10 = 26$

$a^2 = 16$　　$a = \pm 4$ //

$\boxed{5}$ y 軸上にあって，2 点 A(3, 1, 0), B(0, 3, 5) から等距離にある点 P の座標を求めよ。

$P(0, y, 0)$

$\overrightarrow{AP} = (-3, y-1, 0)$　　$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{9+(y-1)^2+0}$

$\overrightarrow{BP} = (0, y-3, -5)$　　$|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{0+(y-3)^2+25}$

$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$

$|\overrightarrow{AP}|^2 = |\overrightarrow{BP}|^2$

$9+(y-1)^2 = (y-3)^2+25$

$9+y^2-2y+1 = y^2-6y+9+25$

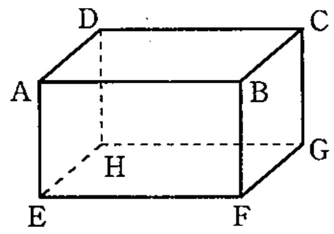
$4y = 24$

$y = 6$

よって　$P(0, 6, 0)$ //

【空間のベクトル】

$\boxed{6}$ 右の図の直方体において，$\overrightarrow{AE}$ に等しいベクトルをあげよ。また，$\overrightarrow{AD}$ の逆ベクトルで $\overrightarrow{DA}$ 以外のものをあげよ。



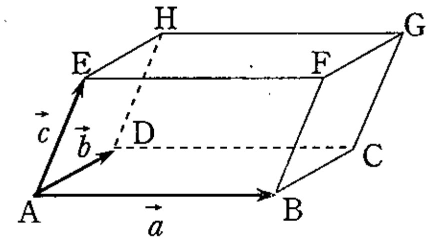
$\overrightarrow{AE}$ に等しいベクトル

$\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{DH}$ //

$\overrightarrow{AD}$ の逆ベクトル

$\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{HE}$ //

$\boxed{7}$ 右の図の平行六面体において，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。



(1) $\overrightarrow{EC}$　$= \vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ //

(2) $\overrightarrow{BH}$　$= -\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ //

(3) $\overrightarrow{DF}$　$= -\vec{b}+\vec{a}+\vec{c}$

$= \vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ //

【空間のベクトルの成分と大きさ】

$\boxed{8}$ 次のベクトルの大きさを求めよ。

(1) $\vec{a}=(3, 4, 5)$

$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25}$

$= 5\sqrt{2}$ //

(2) $\vec{b}=(-1, 2, -2)$

$|\vec{b}| = \sqrt{1+4+4}$

$= 3$ //

$\boxed{9}$ $\vec{a}=(1, 3, -2)$, $\vec{b}=(4, -3, 0)$ のとき，次のベクトルを求めよ。

(1) $3\vec{a}+2\vec{b}$

$= 3(1, 3, -2)+2(4, -3, 0)$

$= (3, 9, -6)+(8, -6, 0)$

$= (11, 3, -6)$ //

(3) $2(-\vec{a}+4\vec{b})$

$= -2\vec{a}+8\vec{b}$

$= -2(1, 3, -2)+8(4, -3, 0)$

$= (-2, -6, 4)+(32, -24, 0)$

$= (30, -30, 4)$ //

$\boxed{10}$ 次の 2 点 A, B について，$\overrightarrow{AB}$ を成分表示し，$|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。

(1) A(2, 1, 4), B(3, −1, 5)

$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 1)$ //

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+1}$

$= \sqrt{6}$ //

(2) A(3, 0, −2), B(1, −4, 2)

$\overrightarrow{AB} = (-2, -4, 4)$ //

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+16+16}$

$= 6$ //

11 $\vec{a}=(x,\ y,\ z)$，$\vec{b}=(-2y+7,\ 1-z,\ 5x+2)$ が等しくなるように，x，y，z の値を定めよ。

$$\begin{cases} x=-2y+7 & —① \\ y=1-z & —② \\ z=5x+2 & —③ \end{cases}$$

xとyの式にして、①と連立

③を②に代入

$y=1-(5x+2)$

$y=-5x-1$ —④

①を代入

$y=-5(-2y+7)-1$

$y=10y-35-1$

$9y=36$

$y=4$

①に代入

$x=-8+7$

$=-1$

③に代入

$z=-5+2$

$=-3$

よって、

$x=-1$, $y=4$, $z=-3$

12 $\vec{a}=(1,\ -2,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ -2)$，$\vec{c}=(3,\ -2,\ -2)$ のとき，$\vec{p}=(-2,\ 3,\ -2)$ を $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$

$(-2,3,-2)=s(1,-2,-1)+t(1,-1,-2)+u(3,-2,-2)$

$=(s+t+3u,\ -2s-t-2u,\ -s-2t-2u)$

$$\begin{cases} s+t+3u=-2 & —① \\ -2s-t-2u=3 & —② \\ -s-2t-2u=-2 & —③ \end{cases}$$

uを消す

uを消す

①×2＋②×3

$2s+2t+6u=-4$

$+\ -6s-3t-6u=9$

$-4s-t=5$ —④

②−③

$-s+t=5$ —⑤

④＋⑤

$-5s=10$

$s=-2$

⑤に代入

$t=3$

①に代入

$-2+3+3u=-2$

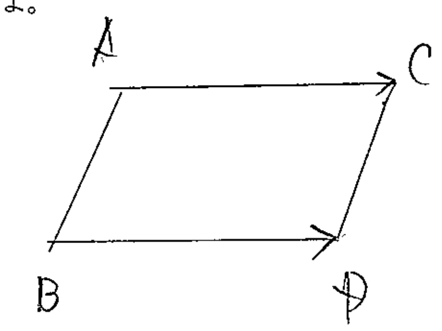
$3u=-3$

$u=-1$

よって

$\vec{p}=-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

13 座標空間に平行四辺形ABDCがあり，A(2, 1, 5)，B(−1, 2, 3)，C(1, 0, −1)，D(x, y, z) であるとする。x，y，z の値を定めよ。



$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AC}=(-1,-1,-6)$

$\overrightarrow{BD}=(x+1,\ y-2,\ z-3)$

$$\begin{cases} x+1=-1 \\ y-2=-1 \\ z-3=-6 \end{cases}$$

$x=-2$, $y=1$, $z=-3$

14 $\vec{a}=(2,\ -4,\ -3)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ 1)$ について，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする実数 t の値と，そのときの最小値を求めよ。

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\,\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

$$\left(\begin{array}{l} |\vec{a}|=\sqrt{4+16+9}=\sqrt{29} \\ |\vec{b}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3} \\ \vec{a}\cdot\vec{b}=2+4-3=3 \end{array}\right)$$

$=29+6t+3t^2$

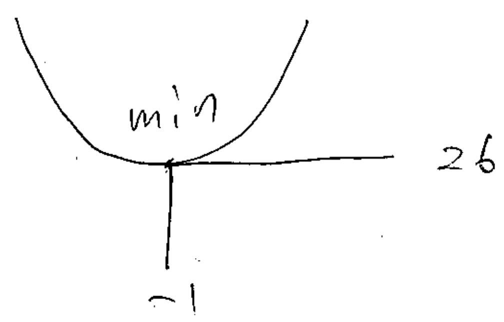
$=3t^2+6t+29$

$=3(t^2+2t)+29$

$=3\{(t+1)^2-1\}+29$

$=3(t+1)^2-3+29$

$=3(t+1)^2+26$



よって

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ の min 26 $(t=-1)$

$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の min $\sqrt{26}$ $(t=-1)$

【ベクトルの内積となす角】

15 次の2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

$\vec{a}=(2,\ -1,\ -2)$, $\vec{b}=(4,\ 3,\ -5)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

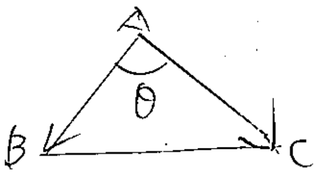
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 8-3+10 = 15$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{4+1+4} = 3$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{16+9+25} = 5\sqrt{2}$$

$$= \frac{15}{3\cdot 5\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $\theta = 45^\circ$

16 3点 A(2, 1, 0), B(0, 2, 1), C(1, 0, 2) を頂点とする △ABC において，∠BAC の大きさを求めよ。



$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$$

$\overrightarrow{AB} = (-2,\ 1,\ 1)$　　$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$\overrightarrow{AC} = (-1,\ -1,\ 2)$　　$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2-1+2 = 3$

$$= \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

よって $\theta = 60^\circ$

【ベクトルの成分と垂直条件】

18 ベクトル $\vec{a}=(1,\ 0,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 1,\ 0)$ の両方に垂直で，大きさが3のベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

$\vec{p} = (x,\ y,\ z)$ とおく

$\vec{a}\cdot\vec{p} = 0$ より

$x + z = 0$ —① 　　$z = -x$ —①'

$\vec{b}\cdot\vec{p} = 0$ より

$-x + y = 0$ —② 　　$y = x$ —②'

$|\vec{p}| = 3$ より

$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 3$

$x^2+y^2+z^2 = 9$ —③

①', ②' を ③ に代入

$x^2+x^2+x^2 = 9$

$x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$

①' ②' に代入

$\vec{p} = (\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3})$
$(-\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

17 $\vec{a}=(1,\ 2,\ x)$, $\vec{b}=(-x^2,\ 2,\ 3)$ が垂直になるように，x の値を定めよ。

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$-x^2+4+3x = 0$

$x^2-3x-4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$

$x = -1,\ 4$

【一直線上にある3点】

19 次の3点 A(2, 3, 6), B(8, 1, 8), C(−1, x, y) が一直線上にあるとき，x, y の値を求めよ。

3点 A, B, C が一直線上

$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC} = (-3,\ x-3,\ y-6)$

$\overrightarrow{AB} = (6,\ -2,\ 2)$

$(-3,\ x-3,\ y-6) = k(6,\ -2,\ 2)$

$= (6k,\ -2k,\ 2k)$

$-3 = 6k$ —①

$x-3 = -2k$ —②

$y-6 = 2k$ —③

① より $k = -\frac{1}{2}$

② に代入

$x-3 = 1$

$x = 4$

③ に代入

$y-6 = -1$

$y = 5$

よって $x = 4,\ y = 5$

【同一平面上にある4点】

20 3点 A~~(3, 1, 2)~~, B~~(2, 0, −2)~~, C(1, 1, 0) の定める平面 ABC 上に点P~~(2, 3, z)~~があるとき，z の値を求めよ。

$$\boxed{\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}}$$

$\overrightarrow{CP} = (1,\ 2,\ z)$

$\overrightarrow{CA} = (2,\ 0,\ 2)$

$\overrightarrow{CB} = (1,\ -1,\ -2)$

$(1,\ 2,\ z) = s(2,\ 0,\ 2) + t(1,\ -1,\ -2)$

$= (2s,\ 0,\ 2s) + (t,\ -t,\ -2t)$

$= (2s+t,\ -t,\ 2s-2t)$

$1 = 2s+t$ —①

$2 = -t$ —②

$z = 2s-2t$ —③

② より

$t = -2$

① に代入

$1 = 2s-2$

$2s = 3$

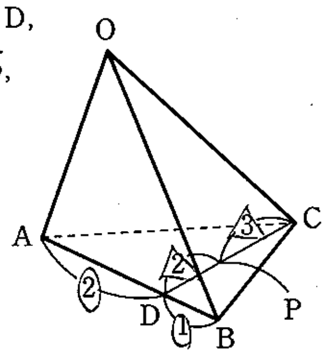
$s = \frac{3}{2}$

③ に代入

$z = 3+4 = 7$

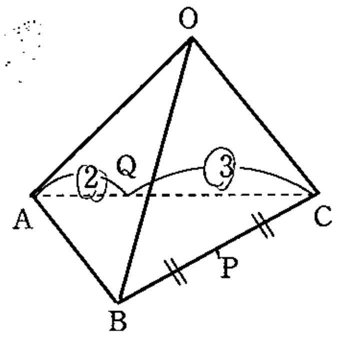
【四面体と内分点】

21 四面体OABCにおいて，辺ABを2：1に内分する点をD，線分CDを3：2に内分する点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とするとき，$\overrightarrow{OP}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。



$$\overrightarrow{OP}=\frac{3\overrightarrow{OD}+2\vec{c}}{2+3}$$
$$=\frac{3}{5}\overrightarrow{OD}+\frac{2}{5}\vec{c}$$
$$\left(\overrightarrow{OD}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}\right)$$
$$=\frac{3}{5}\left(\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}\right)+\frac{2}{5}\vec{c}$$
$$=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$$

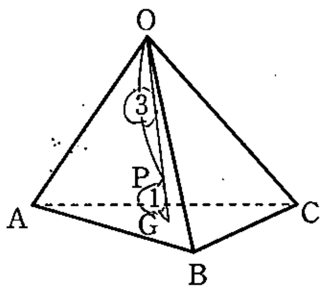
22 四面体OABCにおいて，辺BCの中点をP，辺CAを3：2に内分する点をQとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とするとき，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{BQ}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。



$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$$
$$=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\vec{a}$$
$$=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB}$$
$$=\frac{3\vec{a}+2\vec{c}}{2+3}-\vec{b}$$
$$=\frac{3}{5}\vec{a}-\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$$

23 四面体OABCにおいて，△ABCの重心をG，線分OGを3：1に内分する点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とするとき，$\overrightarrow{OP}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

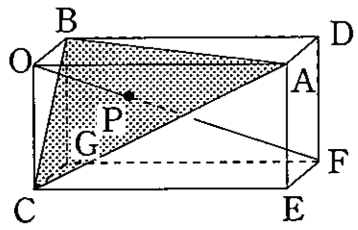


3点 O, P, G は一直線上

$$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OG}$$
$$=\frac{3}{4}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)$$
$$=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

【空間ベクトルと平面】

24 右の図のような直方体において，対角線OFと平面ABCの交点をPとする。OP：OFを求めよ。



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする

3点 O, P, F は一直線上

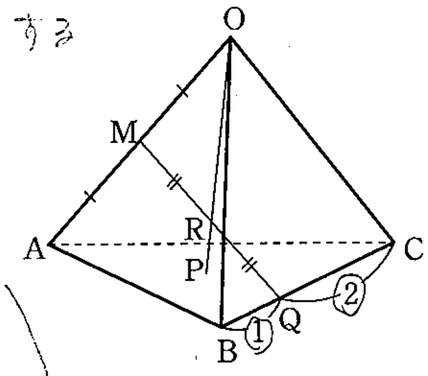
$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OF}$$
$$=k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$
$$=k\vec{a}+k\vec{b}+k\vec{c}$$

4点 A, B, C, P は同一平面上

$$k+k+k=1$$
$$3k=1$$
$$k=\frac{1}{3}$$

よって $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

25 四面体OABCにおいて，辺OAの中点をM，辺BCを1：2に内分する点をQ，線分MQの中点をRとし，直線ORと平面ABCの交点をPとする。OR：OPを求めよ。



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする

3点 O, R, P は一直線上

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}$$

$$\left(\begin{aligned}\overrightarrow{OR}&=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}}{2}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{1+2}\right)\\&=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\end{aligned}\right)$$

$$\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)$$
$$=\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}$$

4点 A, B, C, P は同一平面上

$$\frac{1}{4}k+\frac{1}{3}k+\frac{1}{6}k=1$$
$$\frac{3}{12}k+\frac{4}{12}k+\frac{2}{12}k=1$$
$$\frac{9}{12}k=1$$
$$k=\frac{4}{3}$$

よって $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$

【内分点･外分点，三角形の重心の座標】

26 2点 A(0, 3, 7)，B(3, −3, 1)，C(−6, 2, −1) について，次の点の座標を求めよ。

(1) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点

$$\left(\frac{1\cdot 0+2\cdot 3}{2+1},\ \frac{1\cdot 3+2\cdot(-3)}{2+1},\ \frac{1\cdot 7+2\cdot 1}{2+1}\right)$$
$$=\left(\frac{6}{3},\ \frac{-3}{3},\ \frac{9}{3}\right)$$
$$=(2,\ -1,\ 3)$$

(2) 線分 AB を 3 : 2 に外分する点

$$\left(\frac{-2\cdot 0+3\cdot 3}{3-2},\ \frac{-2\cdot 3+3\cdot(-3)}{3-2},\ \frac{-2\cdot 7+3\cdot 1}{3-2}\right)$$
$$=(9,\ -15,\ -11)$$

(3) 線分 BC の中点

$$\left(\frac{3-6}{2},\ \frac{-3+2}{2},\ \frac{1-1}{2}\right)$$
$$=\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$$

(4) △ABC の重心

$$\left(\frac{0+3-6}{3},\ \frac{3-3+2}{3},\ \frac{7+1-1}{3}\right)$$
$$=\left(-1,\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\right)$$

【空間の 2 点間の距離】

27 z 軸上にあって，A(1, 2, 1)，B(1, 4, −3) から等距離にある の点 P の座標を求めよ。 $\boxed{(0,0,z)}$

P(0, 0, z) とおく

$AP=BP$
$AP^2=BP^2$

$$\begin{cases} AP^2=1+4+(z-1)^2 \\ BP^2=1+16+(z+3)^2 \end{cases}$$

$$5+(z-1)^2=17+(z+3)^2$$
$$5+z^2-2z+1=17+z^2+6z+9$$
$$8z=-20$$
$$z=-\frac{5}{2}$$

よって $P\left(0,\ 0,\ -\frac{5}{2}\right)$

【座標平面に平行な平面の方程式】

28 点 (1, 2, 3) を通り，次の平面に平行な平面の方程式を求めよ。

(1) xy 平面　$z=3$

(2) yz 平面　$x=1$

(3) y 軸に垂直　$y=2$

【球の公式】

29 次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 原点を中心とする半径 3 の球面

$$x^2+y^2+z^2=9$$

(2) 点 (1, 2, −3) を中心とする半径 4 の球面

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$$

(3) 点 A(0, 4, 1) を中心とし，点 B(2, 4, 5) を通る球面

$x^2+(y-4)^2+(z-1)^2=r^2$ とおく

(2, 4, 5) を通るので

$4+0+16=r^2$

$r^2=20$

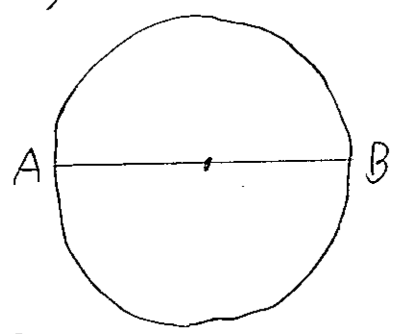
よって

$$x^2+(y-4)^2+(z-1)^2=20$$

(4) 2 点 A(4, −2, 1)，B(0, 4, −5) を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

$$\text{中心}=\text{ABの中点}=\left(\frac{4+0}{2},\ \frac{-2+4}{2},\ \frac{1-5}{2}\right)$$
$$=(2,\ 1,\ -2)$$

$$\text{半径}=\sqrt{4+4+9}=\sqrt{22}$$



よって

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=22$$

30 球面 $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=3^2$ と次の平面が交わる部分は円である。その中心の座標と半径を求めよ。

(1) yz 平面

$x=0$ を代入

$$1+(y-4)^2+(z-2)^2=9$$
$$(y-4)^2+(z-2)^2=8$$

よって　中心 (0, 4, 2)
　　　　半径 $2\sqrt{2}$

(2) 平面 $y=4$

$y=4$ を代入

$$(x+1)^2+0+(z-2)^2=9$$
$$(x+1)^2+(z-2)^2=9$$

よって

中心 (−1, 4, 2)
半径 3