【関数の値】

$\boxed{1}$ 2次関数 $f(x)=x^2-2x+1$ において，次の値を求めよ。

(1) $f(3)$

$= 9-6+1$

$= 4$

(2) $f(-1)$

$= (-1)^2-2\cdot(-1)+1$

$= 1+2+1$

$= 4$

(3) $f(-a)$

$= (-a)^2-2\cdot(-a)+1$

$= a^2+2a+1$

(4) $f(a+1)$

$= (a+1)^2-2(a+1)+1$

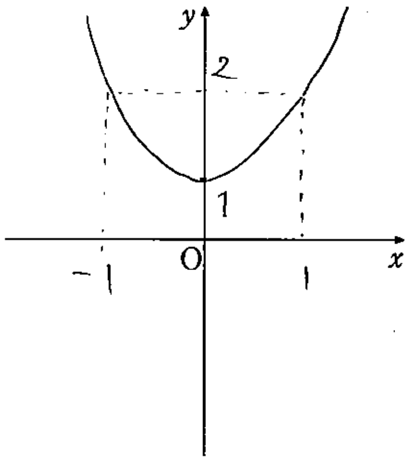
$= a^2+2a+1-2a-2+1$

$= a^2$

【$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ】

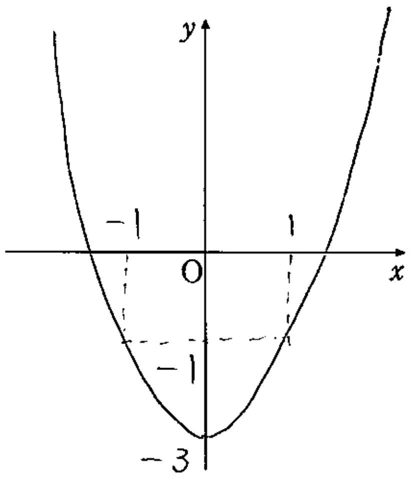
$\boxed{2}$ 次の2次関数のグラフをかき，その頂点を求めよ。

(1) $y=x^2+1$



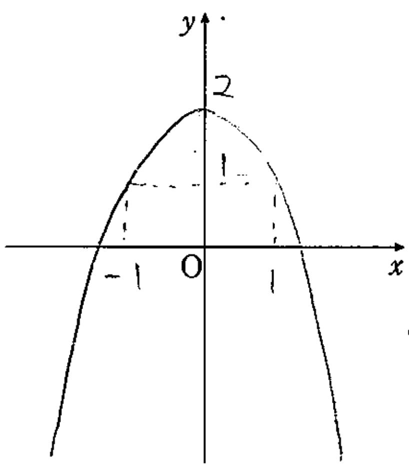
頂点（ 0 , 1 ）

(2) $y=2x^2-3$



頂点（ 0 , −3 ）

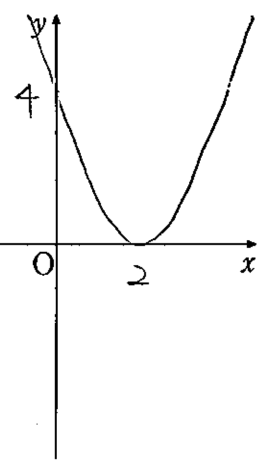
(3) $y=-x^2+2$



頂点（ 0 , 2 ）

$\boxed{3}$ 次の2次関数のグラフをかけ。また，その頂点と軸を求めよ。

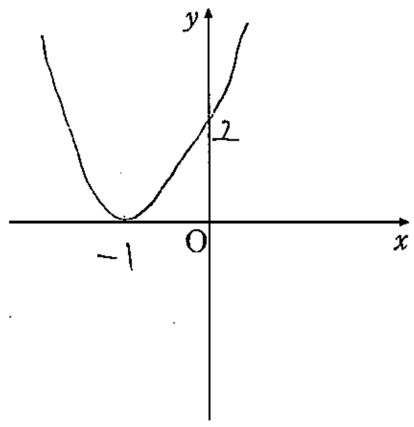
(1) $y=(x-2)^2$



頂点（ 2 , 0 ）

軸　$x=2$

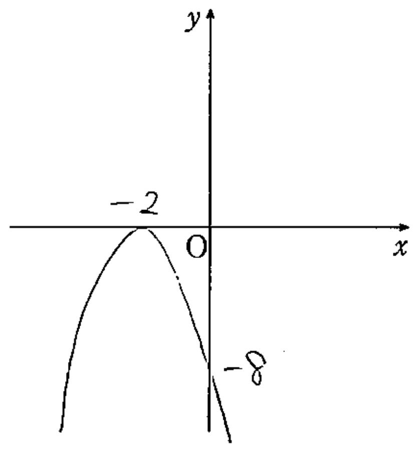
(2) $y=2(x+1)^2$



頂点（ −1 , 0 ）

軸　$x=-1$

(3) $y=-2(x+2)^2$

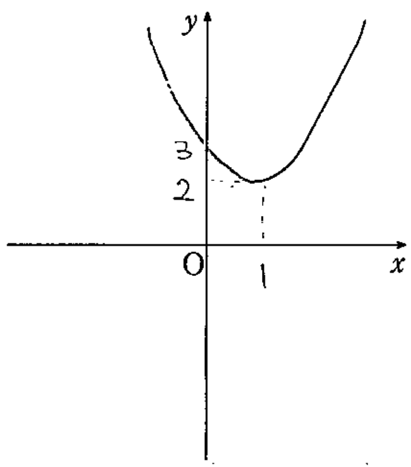


頂点（ −2 , 0 ）

軸　$x=-2$

$\boxed{4}$ 次の2次関数のグラフをかけ。また，その頂点と軸を求めよ。

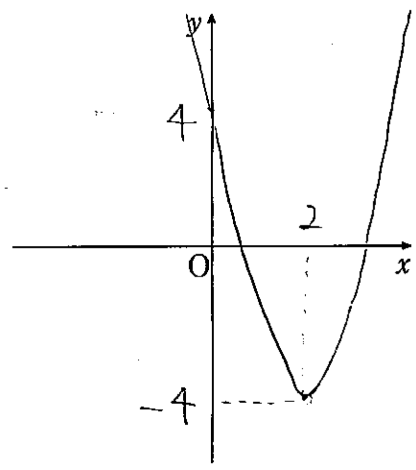
(1) $y=(x-1)^2+2$



頂点（ 1 , 2 ）

軸　$x=1$

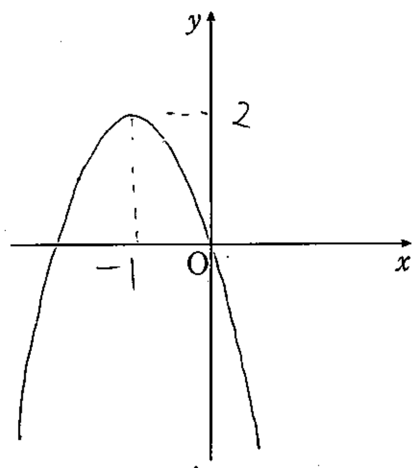
(2) $y=2(x-2)^2-4$



頂点（ 2 , −4 ）

軸　$x=-2$

(3) $y=-2(x+1)^2+2$



頂点（ −1 , 2 ）

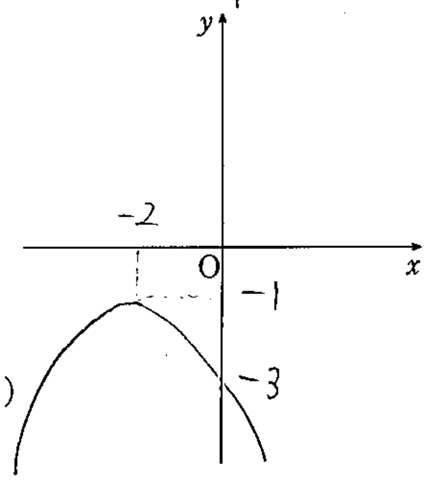
軸　$x=-1$

(4) $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-1$

$y(0) = -\frac{1}{2}\cdot 4-1$

$= -2-1$

$= -3$



頂点（ −2 , −1 ）

軸　$x=-2$

【$y=ax^2+bx+c$ のグラフ】

5 次の2次式を平方完成せよ。

(1) x^2+8x $= (x+4)^2-16$ //

(2) x^2-6x+8 $= (x-3)^2-9+8$

$= (x-3)^2-1$ //

(3) $2x^2+4x+5$ $= 2(x^2+2x)+5$

$= 2\{(x+1)^2-1\}+5$

$= 2(x+1)^2-2+5$

$= 2(x+1)^2+3$ //

(4) $3x^2-6x-2$ $= 3(x^2-2x)-2$

$= 3\{(x-1)^2-1\}-2$

$= 3(x-1)^2-5$ //

(5) x^2+x-2 $= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2$

$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$ //

(6) $-2x^2+6x+4$ $= -2(x^2-3x)+4$

$= -2\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}+4$

$= -2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}+4$

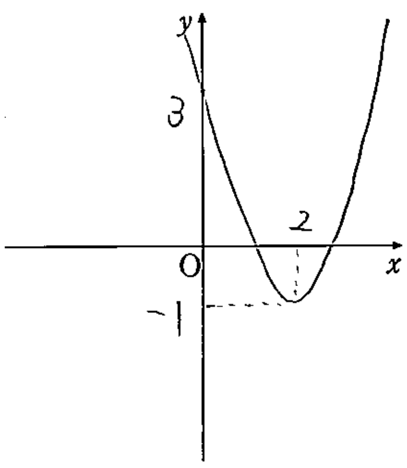
$= -2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{2}$ //

6 次の2次関数のグラフをかけ。また，その頂点と軸を求めよ。

(1) $y=x^2-4x+3$

$= (x-2)^2-4+3$

$= (x-2)^2-1$



頂点 $(2, -1)$

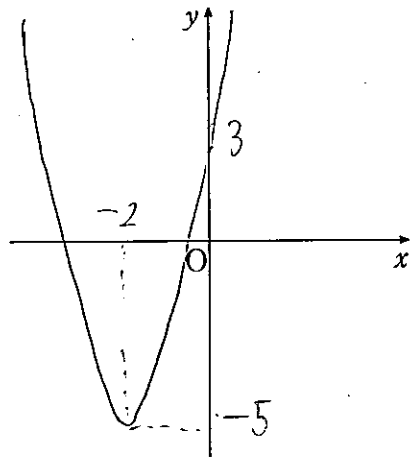
軸 $x=2$

(2) $y=2x^2+8x+3$

$= 2(x^2+4x)+3$

$= 2\{(x+2)^2-4\}+3$

$= 2(x+2)^2-5$



頂点 $(-2, -5)$

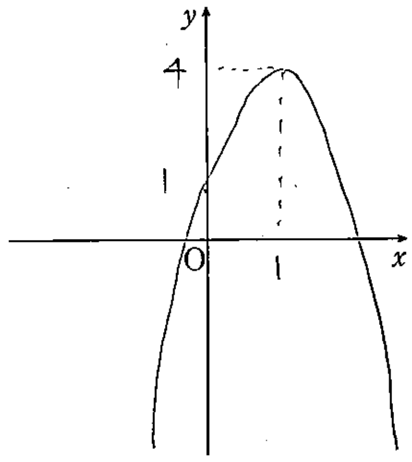
軸 $x=-2$

(3) $y=-3x^2+6x+1$

$= -3(x^2-2x)+1$

$= -3\{(x-1)^2-1\}+1$

$= -3(x-1)^2+4$



頂点 $(1, 4)$

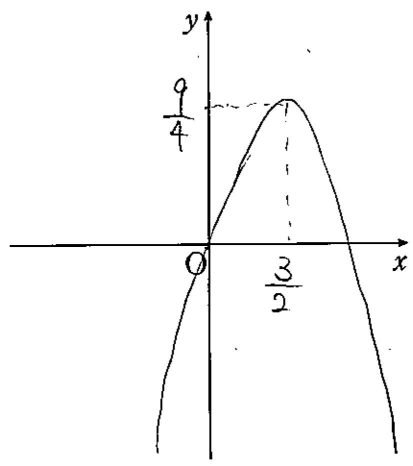
軸 $x=1$

(4) $y=-x^2+3x$

$= -(x^2-3x)$

$= -\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}$

$= -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$



頂点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

軸 $x=\frac{3}{2}$

【グラフの平行移動】

7 放物線 $y=2x^2-4x$ を平行移動して放物線 $y=2x^2+4x-3$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。

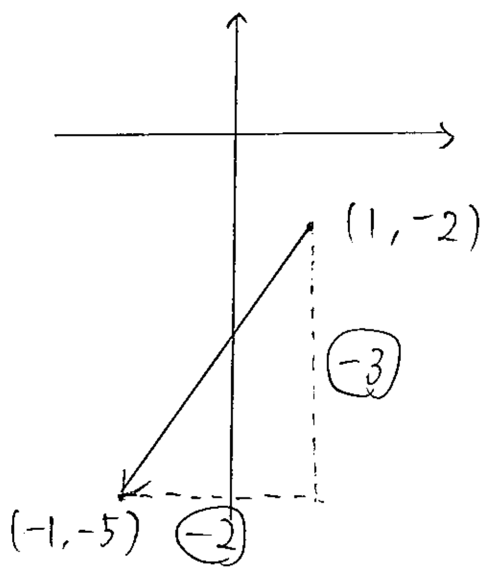
$y = 2x^2-4x$

$= 2(x^2-2x)$

$= 2\{(x-1)^2-1\}$

$= 2(x-1)^2-2$

頂点 $(1, -2)$



$y = 2x^2+4x-3$

$= 2(x^2+2x)-3$

$= 2\{(x+1)^2-1\}-3$

$= 2(x+1)^2-5$

頂点 $(-1, -5)$

x軸方向 に -2

y軸方向 に -3 //

$\boxed{8}$ ２次関数 $y=2x^2-5x+3$ のグラフを，x 軸方向に -2，y 軸方向に１だけ平行移動するとき，移動後の放物線の方程式を求めよ。

$$\boxed{\begin{array}{l} x \longrightarrow x+2 \\ y \longrightarrow y-1 \end{array}}$$

$y-1=2(x-1)^2-5(x-1)+3$

$y-1=2(x^2+4x+4)-5x-10+3$

$y=2x^2+8x+8-5x-6$

$y=2x^2+3x+2$ //

【グラフの対称移動】

$\boxed{9}$ ２次関数 $y=x^2+4x+1$ のグラフの，x 軸，y 軸，原点それぞれに関する対称移動後の放物線の方程式を求めよ。

x軸：　$-y=x^2+4x+1$

$y=-x^2-4x-1$ //

y軸　$y=(-x)^2+4(-x)+1$

$y=x^2-4x+1$ //

原点：　$-y=(-x)^2+4(-x)+1$

$-y=x^2-4x+1$

$y=-x^2+4x-1$ //

【関数の最大･最小】

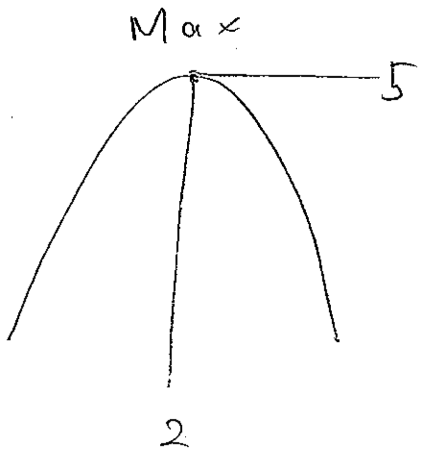
$\boxed{10}$ 次の２次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=-2x^2+8x-3$

$=-2\{x^2-4x\}-3$

$=-2\{(x-2)^2-4\}-3$

$=-2(x-2)^2+5$



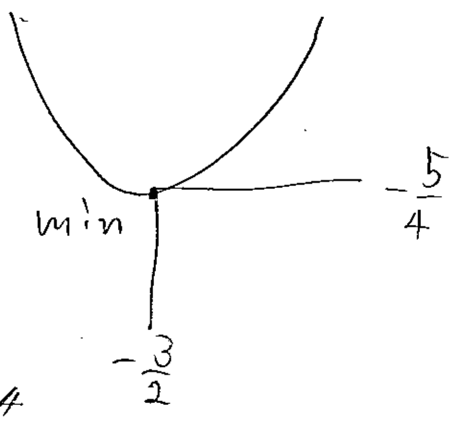
Max 5 $(x=2)$

min なし //

(2)　$y=x^2+3x+1$

$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+1$

$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$



Max なし

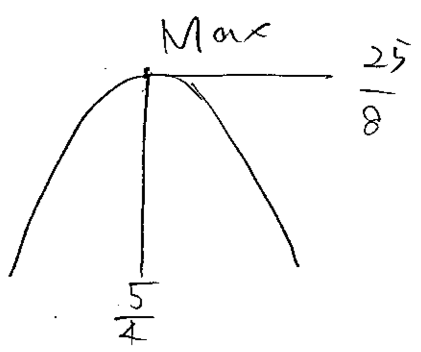
min $-\frac{5}{4}$　$\left(x=-\frac{3}{2}\right)$ //

(3)　$y=-2x^2+5x$

$=-2\left\{x^2-\frac{5}{2}x\right\}$

$=-2\left\{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right\}$

$=-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$



Max $\frac{25}{8}$　$\left(x=\frac{5}{4}\right)$

min なし //

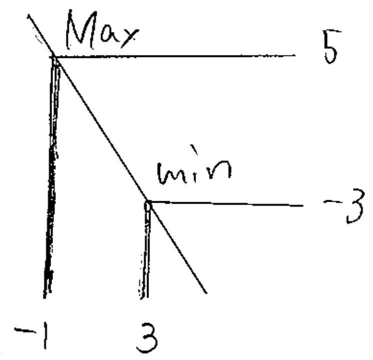
$\boxed{11}$ 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。また，(1)，(2) は値域を求めよ。

(1)　$y=-2x+3$　$(-1\leqq x\leqq 3)$

Max 5　$(x=-1)$

min -3　$(x=3)$

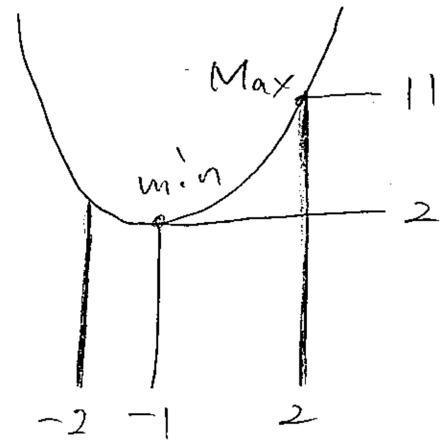
値域　$-3\leqq y\leqq 5$ //



(2)　$y=x^2+2x+3$　$(-2\leqq x\leqq 2)$

$=(x+1)^2-1+3$

$=(x+1)^2+2$



Max 11　$(x=2)$

min 2　$(x=-1)$

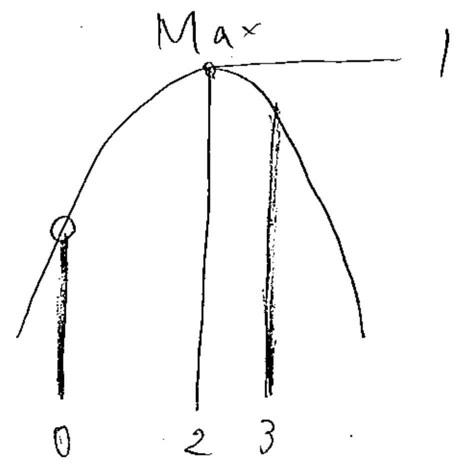
値域　$2\leqq y\leqq 11$ //

(3)　$y=-x^2+4x-3$　$(0<x\leqq 3)$

$=-\{x^2-4x\}-3$

$=-\{(x-2)^2-4\}-3$

$=-(x-2)^2+1$



Max 1　$(x=2)$

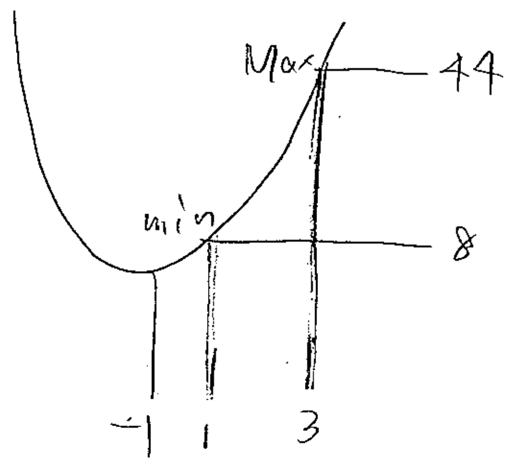
min なし //

(4)　$y=3x^2+6x-1$　$(1\leqq x\leqq 3)$

$=3\{x^2+2x\}-1$

$=3\{(x+1)^2-1\}-1$

$=3(x+1)^2-4$



Max 44　$(x=3)$

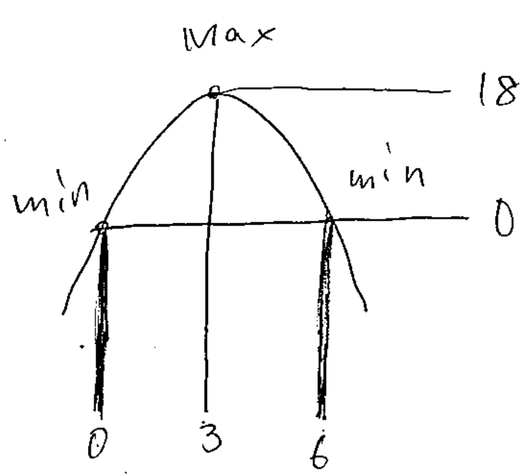
min 8　$(x=1)$ //

(5)　$y=-2x^2+12x$　$(0\leqq x\leqq 6)$

$=-2\{x^2-6x\}$

$=-2\{(x-3)^2-9\}$

$=-2(x-3)^2+18$



Max 18　$(x=3)$

min 0　$(x=0,6)$ //

12 次の条件を満たすように，定数 c の値を定めよ。

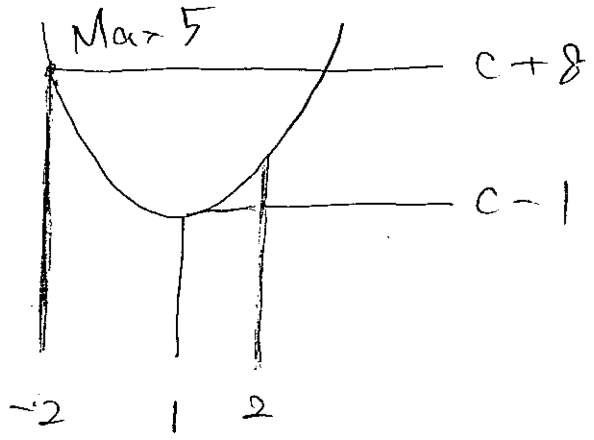
(1) 関数 $y=x^2-2x+c$ $(-2\leqq x\leqq 2)$ の最大値が 5 である。

$y=(x-1)^2-1+c$

よって

$c+8=5$

$c=-3$

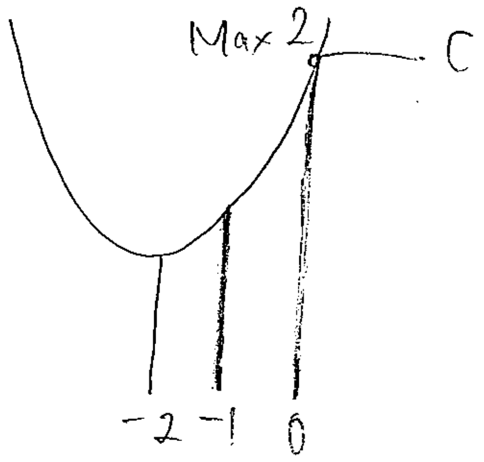


(2) 関数 $y=x^2+4x+c$ $(-1\leqq x\leqq 0)$ の最大値が 2 である。

$y=(x+2)^2-4+c$

よって

$c=2$



(3) 関数 $y=-x^2+6x+c$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最小値が -7 である。

$y=-\{x^2-6x\}+c$

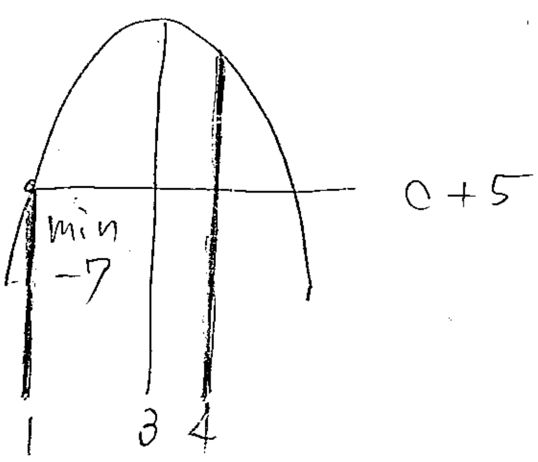
$=-\{(x-3)^2-9\}+c$

$=-(x-3)^2+9+c$

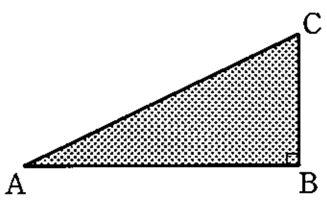
よって

$c+5=-7$

$c=-12$ //



13 直角三角形 ABC において，直角をはさむ 2 辺 AB, BC の長さの和が 14 cm であるとする。このような三角形の面積の最大値を求めよ。



$AB=x$ とすると
$BC=14-x$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}x(14-x)$

$=-\frac{1}{2}x^2+7x$

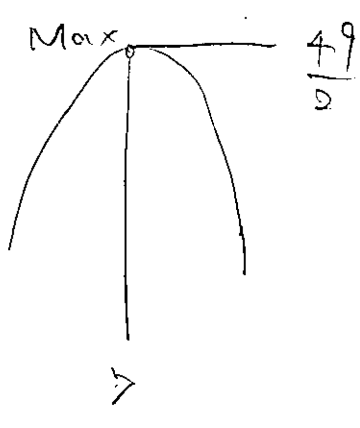
$=-\frac{1}{2}\{x^2-14x\}$

$=-\frac{1}{2}\{(x-7)^2-49\}$

$=-\frac{1}{2}(x-7)^2+\frac{49}{2}$

範囲は
$x>0$ かつ $14-x>0$
$x<14$
$0<x<14$

よって $\frac{49}{2}$ cm^2 //

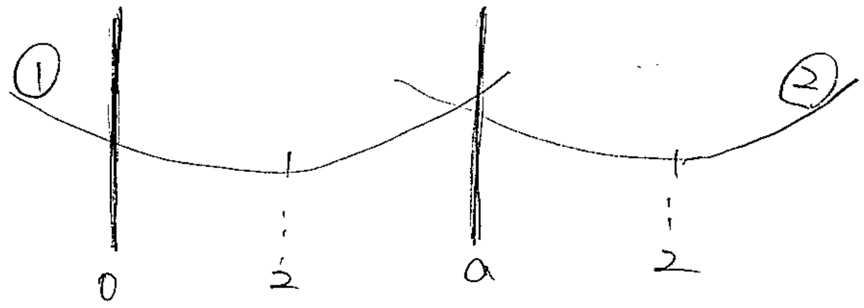


【定義域が広がるときの最大･最小】

14 $a>0$ とする。関数 $y=x^2-4x+5$ $(0\leqq x\leqq a)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。

$y=(x-2)^2+1$ 頂 $(2,1)$



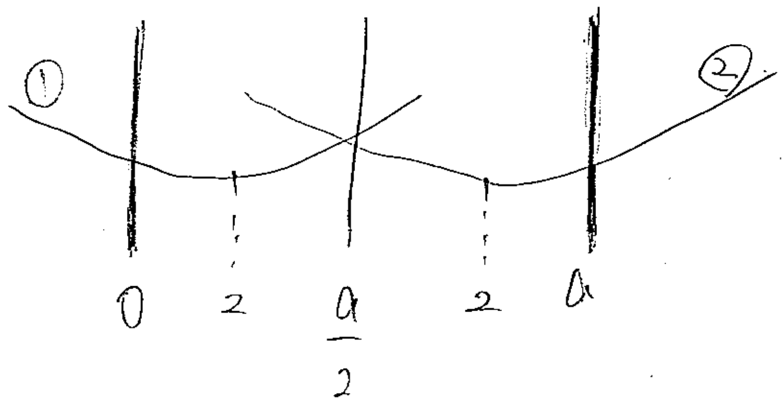
① $2\leqq a$ のとき

min 1 $(x=2)$ //

② $a\leqq 2$ のとき

min $y(a)=a^2-4a+5$ $(x=a)$ //

(2) 最大値を求めよ。



① $2\leqq\frac{a}{2}$

$4\leqq a$ のとき

Max $y(a)=a^2-4a+5$ $(x=a)$ //

② $a\leqq 4$ のとき

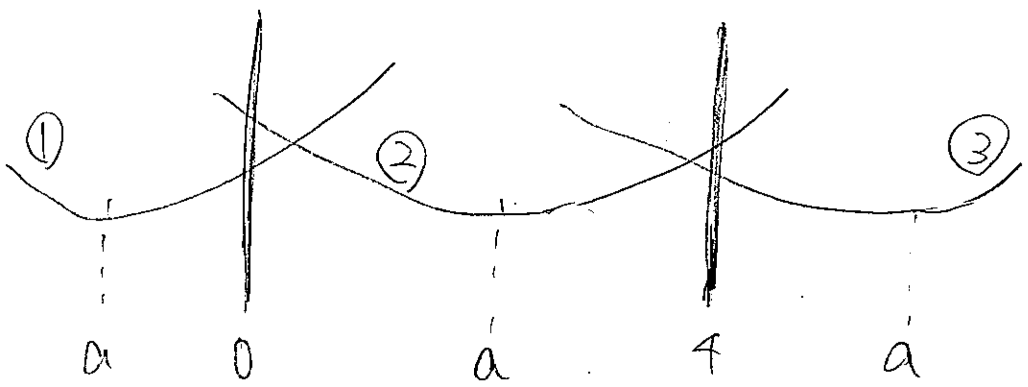
Max $y(0)=5$ $(x=0)$ //

【軸が動くときの最大･最小】

15 関数 $y=x^2-2ax+4$ $(0\leqq x\leqq 4)$ ついて，次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。

$y=(x-a)^2-a^2+4$ 頂 $(a,\ -a^2+4)$



① $a\leqq 0$ のとき.

$\min\ y(0)=4 \quad (x=0)$ //

② $0\leqq a\leqq 4$ のとき.

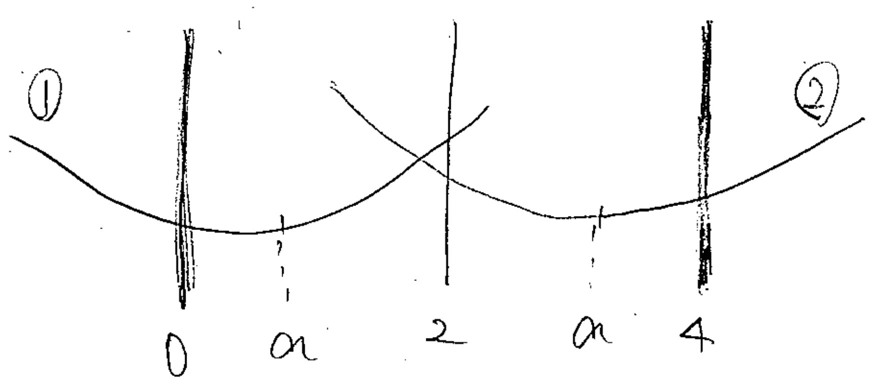
$\min\ -a^2+4 \quad (x=a)$ //

③ $4\leqq a$

$\min\ y(4)=16-8a+4$

$=20-8a \quad (x=4)$ //

(2) 最大値を求めよ。



① $a\leqq 2$ のとき

$\mathrm{Max}\ y(4)=20-8a \quad (x=4)$ //

② $2\leqq a$ のとき

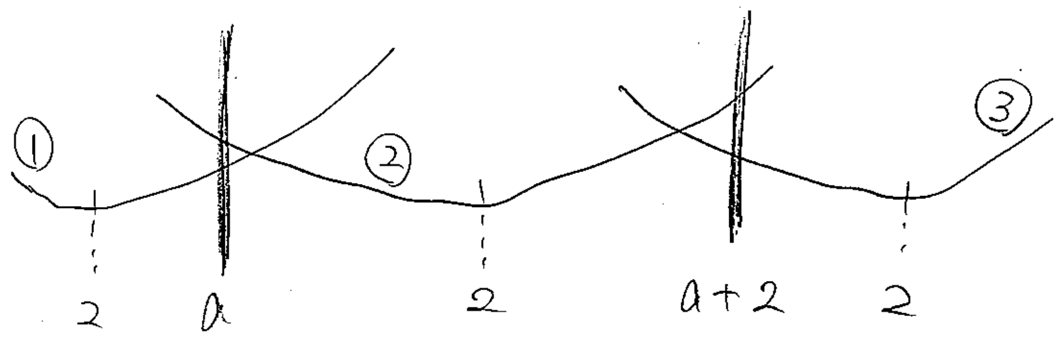
$\mathrm{Max}\ y(0)=4 \quad (x=0)$ //

【区間が動くときの最大･最小】

16 関数 $y=x^2-4x+3$ $(a\leqq x\leqq a+2)$ について次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。

$y=(x-2)^2-1$ 頂 $(2,\ -1)$



① $2\leqq a$ のとき

$\min\ y(a)=a^2-4a+3 \quad (x=a)$ //

③ $a+2\leqq 2$

$a\leqq 0$ のとき.

$\min\ y(a+2)=(a+2)^2-4(a+2)+3$

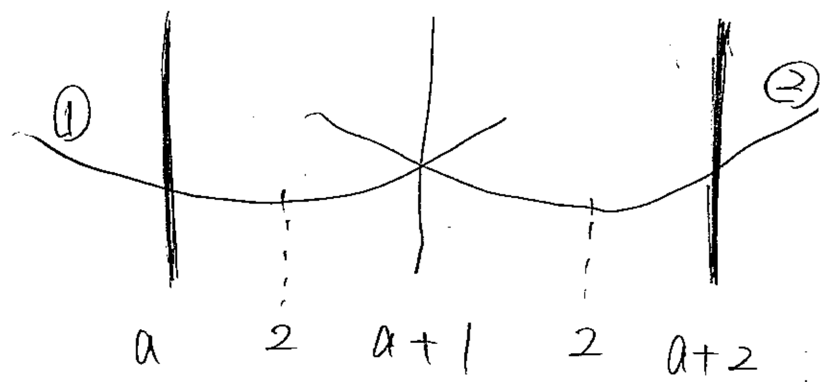
$=a^2+4a+4-4a-8+3$

$=a^2-1 \quad (x=a+2)$ //

② $0\leqq a\leqq 2$ のとき

$\min\ -1 \quad (x=2)$ //

(2) 最大値を求めよ。



① $2\leqq a+1$

$1\leqq a$ のとき

$\mathrm{Max}\ y(a+2)=a^2-1 \quad (x=a+2)$ //

② $a\leqq 1$ のとき

$\mathrm{Max}\ y(a)=a^2-4a+3 \quad (x=a)$ //

２次関数⑥

【2 次関数の決定（軸，頂点が条件）】

17 グラフが次の条件を満たす２次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 $(-2,\ 4)$ で，点 $(-4,\ 2)$ を通る。

$y = a(x+2)^2+4$

条件より

$2 = a(-4+2)^2+4$

$4a = -2$

$a = -\frac{1}{2}$

よって

$y = -\frac{1}{2}(x+2)^2+4$

(2)　軸が直線 $x=1$ で，２点 $(3,\ -6)$，$(0,\ -3)$ を通る。

$y = a(x-1)^2+q$

条件より

$$\begin{cases} -6 = 4a+q & \text{—①} \\ -3 = a+q & \text{—②} \end{cases}$$

①−②

$-3 = 3a$

$a = -1$

②に代入

$-3 = -1+q$

$q = -2$

よって

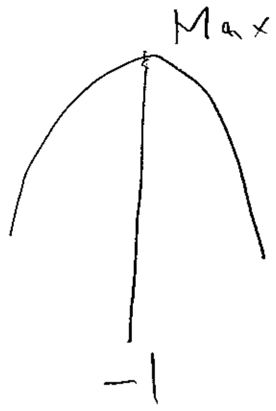
$y = -(x-1)^2-2$

【2 次関数の決定（最大値，最小値が条件）】

18 次の条件を満たす２次関数を求めよ。

(1)　$x=-1$ で最大となり，そのグラフが２点 $(1,\ 5)$，$(3,\ -7)$ を通る。

$y = a(x+1)^2+q \quad (a<0)$



条件より

$$\begin{cases} 5 = 4a+q & \text{—①} \\ -7 = 16a+q & \text{—②} \end{cases}$$

②−①

$-12 = 12a$

$a = -1$　($a<0$ を満たす)

②に代入

$-7 = -16+q$

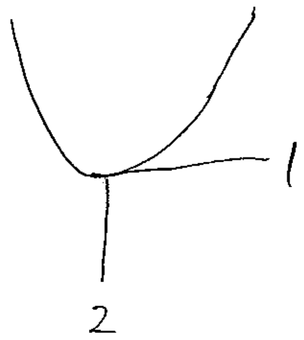
$q = 9$

よって

$y = -(x+1)^2+9$

(2)　$x=2$ で最小値 1 をとり，$x=4$ のとき $y=9$ となる

$y = a(x-2)^2+1 \quad (a>0)$



条件より

$9 = 4a+1$

$4a = 8$

$a = 2$　($a>0$ を満たす)

よって

$y = 2(x-2)^2+1$

19 ２次関数のグラフが $(2,\ -2)$，$(3,\ 5)$，$(-1,\ 1)$ を通るとき，その２次関数を求めよ。

$y = ax^2+bx+c$

条件より

$$\begin{cases} 4a+2b+c = -2 & \text{—①} \\ 9a+3b+c = 5 & \text{—②} \\ a-b+c = 1 & \text{—③} \end{cases}$$

②−①

$5a+b = 7$ —④

②−③

$8a+4b = 4$

$2a+b = 1$ —⑤

④−⑤

$3a = 6$

$a = 2$

⑤に代入

$4+b = 1$

$b = -3$

$a=2,\ b=-3$ を③に代入

$2+3+c = 1$

$c = -4$

よって

$y = 2x^2-3x-4$

【条件式がある場合の最大･最小】

20 実数 x，y が $2x+y=5$ を満たしながら変化するとき，x^2+y^2 の最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。 —②

$y = 5-2x$ —①

①を②に代入

$x^2+(5-2x)^2 = x^2+25-20x+4x^2$

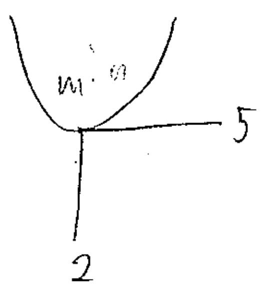
$= 5x^2-20x+25$

$= 5\{x^2-4x\}+25$

$= 5\{(x-2)^2-4\}+25$

$= 5(x-2)^2-20+25$

$= 5(x-2)^2+5$



よって

min 5　($x=2,\ y=1$)　$\boxed{x=2\text{ を①に代入}}$