第6章　微分法の応用

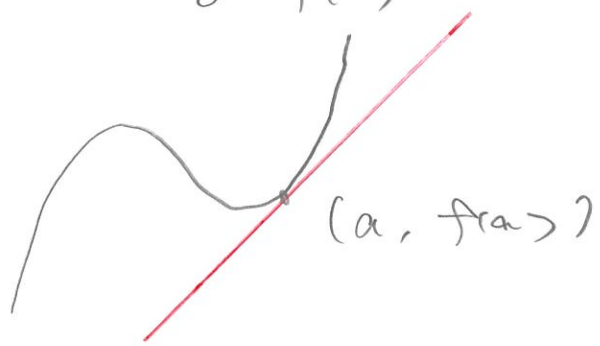
接線の方程式

傾き

$f'(a)$

接線の方程式

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$



ex

$f(x)=e^x$ 上の $(1, e)$ における接線の方程式

傾き

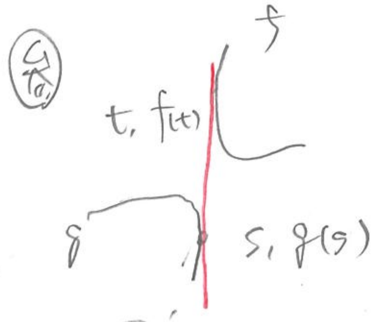
$f'(x)=e^x$

$f'(1)=e$

接線の方程式

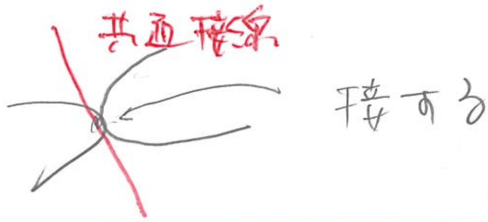
$y-e=e(x-1)$

$y=ex$



$\boxed{1}$ ～ $\boxed{15}$

$\boxed{5}$ → ① 共有点
② 接線の傾き



$\boxed{2}$ → $y=f(x)$ 上にない定点を通る接線は
接点を $(a, f(a))$ とおけ.

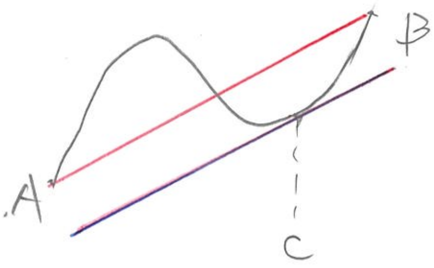
平均値の定理

$f(x)$ が

$a < x < b$ で微分可能 のとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad (a<c<b)$$

を満たす c が存在（少なくとも1つ存在）



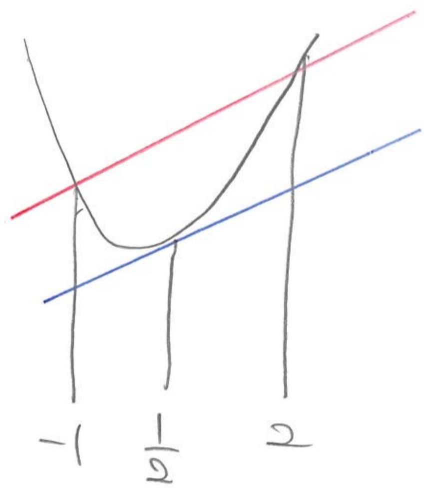
ex

$f(x) = x^2$ は

$-1 < x < 2$ で微分可能

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = f'(c) \quad (-1<c<2)$$

となる c が存在



6 7

極値をもつ条件

$$\boxed{x=a \text{ で極値をもつ} \Longrightarrow f'(a)=0}$$

逆は不成立

ex.

$f(x) = x + \dfrac{a}{x}$ が $x=1$ で極値をとるように、

定数 a の値を定めよ。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
f'	$\pm$	0	$\mp$
f			

$f'(1)=0$

(解答)

$f'(x) = 1 - \dfrac{a}{x^2} \quad (x \neq 0)$

$f'(1) = 1 - a = 0$

$a = 1$

逆に

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0$ のとき

$x = \pm 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
f'	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	-2	$\searrow$	/	$\searrow$	2	$\nearrow$

極小値 2 $(x=1)$

よって、$a=1$ //

反例

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(x) = 0$ のとき

$x = 0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
f'	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$

$f'(0) = 0 \;\not\Longrightarrow\; x=0$ で極値をもつ

$\boxed{8} \sim \boxed{12}$

グラフの凹凸(おうとつ)

$f''(x) > 0$	$\longrightarrow$	下に凸(とつ)
$f''(x) < 0$	$\longrightarrow$	上に凸

覚え方

$y = x^2$ で考える

$y'' = 2 > 0 \longrightarrow$ 下に凸

ex

$f(x) = x^3 - 3x$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0$ のとき

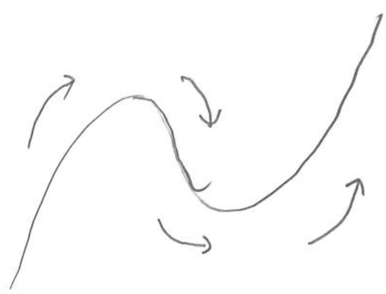
$x = \pm 1$

$f''(x) = 6x$

$x = 0$

変曲点…(0, 0)

x	…	-1	…	0	…	1	…
f'	+	0	−	−	−	0	+
f''	−	−	−	$\boxed{0}$	+	+	+
f	↗	2	↘	0	↘	−2	↗

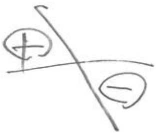


13

グラフの書き方

(1) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ のグラフ

(解答)



$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$

$f'(x)=0$ のとき

$x=0$

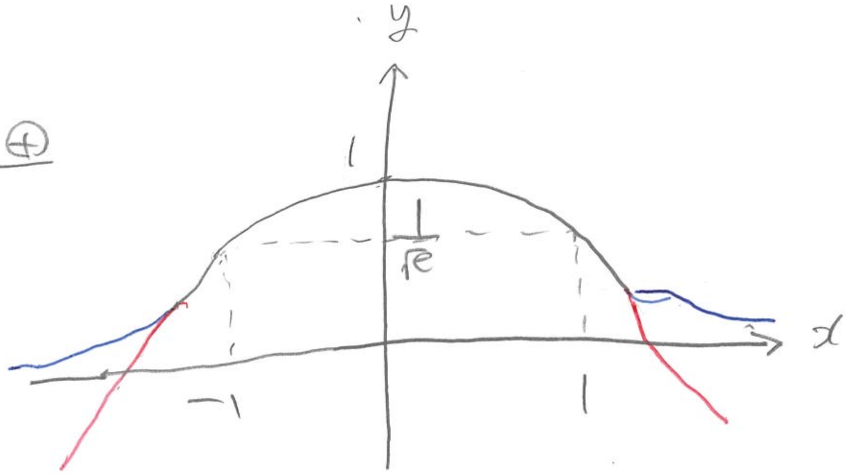
$f''(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}+x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$

$=(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f''(x)=0$ のとき

$x=\pm 1$

x	…	-1	…	0	…	1	…
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗



漸近線

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

[別解] 対称性

$f(-x)=f(x)$

偶関数

x	0	…	1	…
f'	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	$-$	0	$+$
f	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗

(2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ のグラフ

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + x + 1 \quad (x \neq 1)$$

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x-1 \overline{)\, x^2 \quad} \\ \underline{x^2 - x} \\ x \\ \underline{x-1} \\ 1 \end{array}$$

漸近線

$$\begin{cases} \boxed{y = x+1} \\ \boxed{x = 1} \end{cases}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + 1$$

$f'(x) = 0$ のとき

$$(x-1)^2 = 1$$

$$x - 1 = \pm 1$$

$$x = 0, 2$$

$$f''(x) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

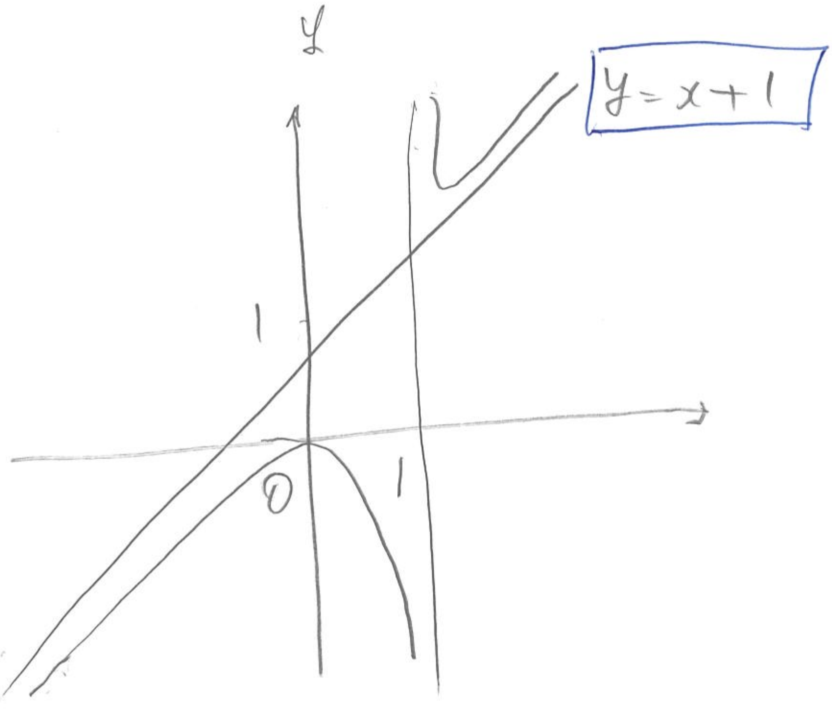
$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

x	…	0	…	1	…	2	…
f	+	0	−		−	0	+
f'	−	−	−		+	+	+
f''	↗	0	↘		↘	4	↗



(3) $f(x)=(-x+1)e^{-x+1}$ のグラフ

$$f'(x) = -e^{-x+1} - (-x+1)e^{-x+1}$$

$$= -e^{-x+1} + (x-1)e^{-x+1}$$

$$= (x-2)e^{-x+1}$$

$f'(x)=0$ のとき.

$x=2$

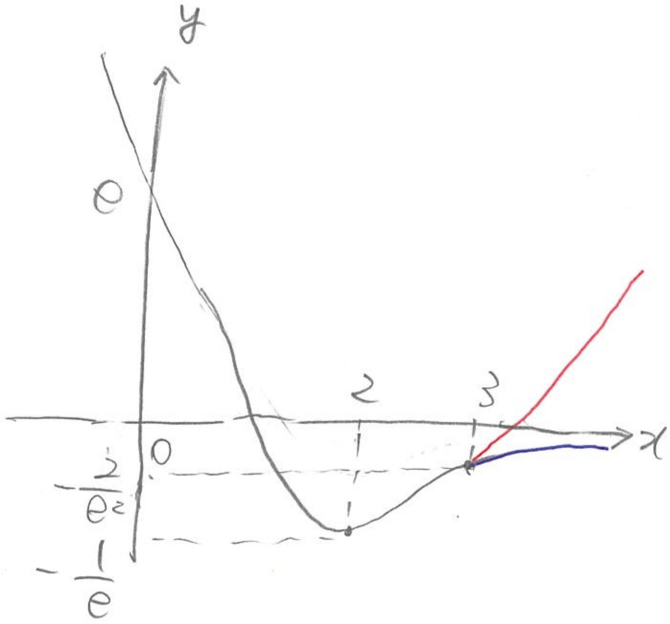
$$f''(x) = e^{-x+1} - (x-2)e^{-x+1}$$

$$= (3-x)e^{-x+1}$$

$f''(x)=0$ のとき.

$x=3$

x	…	2	…	3	…
f'	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	$+$	$+$	0	$-$
f	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$-\frac{2}{e^2}$	↗



漸近線

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} -(x-1)e^{-(x-1)}$$

$-(x-1)=t$ とおく

$$= \lim_{t\to\infty} -te^{-t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} -\frac{t}{e^t}$$

$$= 0$$

$\boxed{17}$ (2) $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad (x > 0)$

を用いて、$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ を証明せよ.

(証明)

$$e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 > \frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore \quad e^x > \frac{1}{2}x^2 > 0$$

$$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2} > 0$$

$$\frac{2}{x} > \frac{x}{e^x} > 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x} = 0$$

はさみうちの定理より

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0 \qquad \text{(証明終)}$$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0}$$

ロピタルの定理

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

不定形

ex

① $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = 1$ //

② $\displaystyle \lim_{x\to 0} x\log x = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}(-x)$

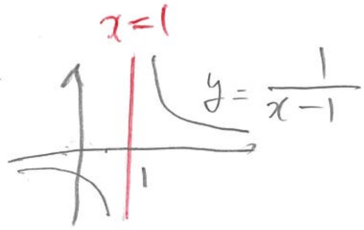
$= 0$ //

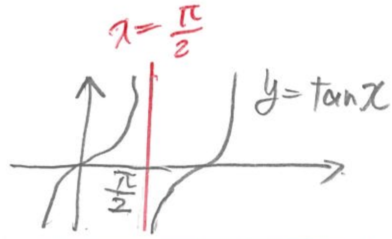
③ $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1-\cos x}{3x^2}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}$

$\displaystyle = \frac{1}{6}$ //

漸近線





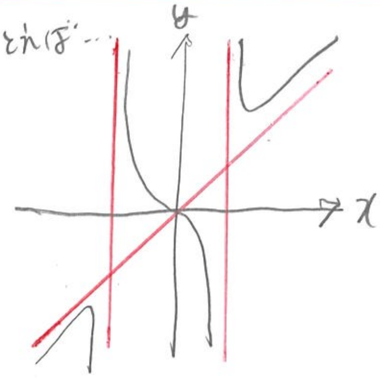
漸近線
- ① y軸に平行 ($x=1$, $x=\frac{\pi}{2}$ など)
- ② y軸に平行でない ($y=3x+2$, $y=0$ など)

② y軸に平行でない ($y = ax + b$)

傾き $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

切片 $b = \lim_{x\to\pm\infty} \{f(x) - ax\}$

たとえば…



ex

$y = \frac{x^3}{x^2+1}$ のグラフ

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - \frac{x^3+x}{x^2+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

∴ 漸近線 $y = x$

[別解]

$$y = \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{-x}{x^2+1} + x$$

$$\begin{array}{r} x \\ x^2+1 \enclose{longdiv}{x^3} \\ \underline{x^3+x} \\ -x \end{array}$$

∴ 漸近線 $y = x$

ex

$y=2x+\sqrt{x^2-1}$ の漸近線

$a=\lim_{x\to\infty}\left(2+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=3$

$a=\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{x^2-1})$

$-x=t$ とおく

$=\lim_{t\to\infty}\left(-2t+\sqrt{t^2-1}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-2t+\sqrt{t^2-1}}{-t}\right)$

$=\lim_{t\to\infty} 2-\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}=1$

$a=3$ のとき　$b=\lim_{x\to\infty}(2x+\sqrt{x^2-1}-3x)$

$=\lim_{x\to\infty}(-x+\sqrt{x^2-1})$

⋮

アジムリ

$y=2x+\sqrt{x^2-1}\fallingdotseq 2x+\sqrt{x^2}=2x+|x|$

$y=3x,\ x$

$\boxed{14}\ \boxed{15}$

極大・極小と第2次導関数

$\boxed{16}$ 例

次の関数の極値を、第2次導関数を利用して求めよ

$$f(x) = x + 2\cos x \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

(解答)

$f'(x) = 1 - 2\sin x$

$f'(x) = 0$

$x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

$f''(x) = -2\cos x$

$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} < 0$

$f''\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -2\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sqrt{3} > 0$

よって

極大値 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \qquad \left(x = \frac{\pi}{6}\right)$

極小値 $f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} \qquad \left(x = \frac{5}{6}\pi\right)$

$f'(a) = 0,\ f''(a) > 0 \Longrightarrow$ 極小値 $f(a)$

$f'(a) = 0,\ f''(a) < 0 \Longrightarrow$ 極大値 $f(a)$

不等式の証明

$$\boxed{(左辺) \geqq (右辺) \Rightarrow y = (左辺) - (右辺) \text{ の } \min \geqq 0}$$

ex.

$e^x > 1 + x$ を証明せよ $(x > 0)$

(証明)

$f(x) = e^x - (1 + x)$

$f'(x) = e^x - 1 > 0 \quad (x > 0)$

$\therefore$ $f(x)$ は単調増加

$\min f(0) = 0$

よって. $e^x > 1 + x$