

微分法の応用①

1 【接線の方程式】

次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ。

(1) $y = \frac{4}{x}$, A(-1, -4)

(2) $y = \tan x$, A(0, 0)

2

曲線 $y = e^x$ について、次のような接線の方程式を求めよ。

(1) 傾きが 1 である

(2) 点 (1, 0) を通る

3

次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ。

(1) 楕円 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$, A(-1, 2)

(2) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$, A($\sqrt{2}$, -1)

4 【法線の方程式】

次の曲線上の点 A における法線の方程式を求めよ。

(1) $y = \frac{2}{x}$, A(1, 2)

(2) $y = \sin x$, A($\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2}$)

5 【共通接線】

2つの曲線 $y = ax^2 + b$, $y = \log x$ が、点 A(e , 1) を共有し、かつ点 A で共通な接線をもつように、定数 a , b の値を定めよ。

6 【平均値の定理】

次の場合に、平均値の定理における c の値を求めよ。

$$f(x) = x^3, a = -1, b = 2$$

7

平均値の定理を用いて、次のことを証明せよ。

$$a < b \text{ のとき } e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$$

8

【関数の増減】

次の関数の増減を調べよ。

(1) $f(x) = x - e^x$

(2) $f(x) = x - \log x$

(3) $f(x) = x + \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$

9

【関数の極大と極小】

次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(2) $f(x) = x \log x$

(3) $f(x) = x + \frac{2}{x}$

10

次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x) = |x|(x+1)$

(2) $f(x) = |x|\sqrt{x+2}$

11

関数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ が $x=1$ で極値をとるように、定数 a の値を定めよ。また、このとき、関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

12 【関数の最大と最小】

次の関数の最大値、最小値を求めよ。

(1) $y = (1 + \cos x)\sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

(2) $y = \frac{4-3x}{x^2+1} \quad (1 \leq x \leq 4)$

13 【関数のグラフ】

次の関数の凹凸を調べよ。また、変曲点があればその座標を求めよ。

(1) $y = x^4 + 2x^3 + 1$

(2) $y = xe^{-x}$

(3) $y = x - \cos x \quad (0 < x < \pi)$

(4) $y = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x$

14

関数 $y = e^{-2x^2}$ の増減, グラフの凹凸, 漸近線を調べて, グラフの概形をかけ。

15

関数 $y = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$ のグラフの概形をかけ。

16

次の関数の極値を, 第2次導関数を利用して求めよ。

(1) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

(2) $f(x) = x + 2\sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

17 【不等式の証明】

$x > 0$ のとき, 次の不等式を証明せよ。

(1) $\log(x + 1) < x$

(2) $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

18 【方程式の実数解の個数】

a は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1) $\frac{x^3}{x-1} = a$

(2) $xe^x - a = 0$

19 【速度と加速度】

地上から、初速度 v_0 m/s でボールを真上に打ち上げるとき、 t 秒後の高さ x m は、

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

で与えられている。ただし、 g は定数とする。 t 秒後におけるボールの速度 v m/s と

加速度 a m/s² を求めよ。

20

時刻 t における点 P の座標 (x, y) が次の式で与えられるとき、 $t=3$ における P の速さ、加速度の大きさを求めよ。

(1) $x = 2t + 1, y = t^2 - 4t$

(2) $x = 2\cos \pi t, y = 2\sin \pi t$

21 【近似式】

$h \neq 0$ のとき、次の関数の値について、1 次の近似式を作れ。

(1) $\cos(a + h)$

(2) $\tan(a + h)$

22

$x \neq 0$ のとき、次の関数について、1 次の近似式を作れ。

(1) e^x (2) $\log(1+x)$

(3) $\frac{1}{1+x}$

23

1 次の近似式を用いて、次の値の近似値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{1.03}$ (2) $\log 1.01$

(3) $\frac{1}{0.998}$