

極限①

1 【無限数列の収束・発散】

次の数列の極限值を調べよ。

(1) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}$

(2) $\cos\pi, \cos3\pi, \cos5\pi, \dots, \cos(2n-1)\pi, \dots$

2

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3 - n^2)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - 3n^2)$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - n^3)$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-2}$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n^2+3}$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2n}{2n+1}$

3

次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+7+10+\dots+(3n+1)}{5+8+11+\dots+(3n+2)}$$

4

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-n} - n)$

5 【はさみうちの定理】

θ を定数とすると、次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\theta}{6}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n\theta}{n^2+1}$

6 【無限等比数列】

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $(\sqrt{3})^n$

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

(3) $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$

(4) $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

7

数列 $\{(x^2+2x)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また、そのときの極限值を求めよ。

8

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2^n}{3^n}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{3^n - 2^n}$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 4^n)$

極限②

9

数列 $\left\{ \frac{1-r^n}{1+r^n} \right\}$ の極限を、次の各場合について求めよ。

- (1) $r > 1$ (2) $r = 1$

- (3) $|r| < 1$ (4) $r < -1$

10

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の極限值を求めよ。

$$a_1 = 1, a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n + 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

11 【無限級数】

次のような無限級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$

12 【無限等比級数】

次のような無限等比級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

- (1) 初項 1, 公比 $\frac{1}{2}$ (2) 初項 $\sqrt{2}$, 公比 $\sqrt{2}$

- (3) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots$ (5) $(\sqrt{2} + 1) + 1 + (\sqrt{2} - 1) + \dots$

13

次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

(1) $1 + (2-x) + (2-x)^2 + \dots$

(2) $x + x(2-x) + x(2-x)^2 + \dots$

14

座標平面上で、点 P が原点 O から正の向きに 1 だけ進み、そこから負の向きに $\frac{1}{2^2}$ 、そこから正の向きに $\frac{1}{2^4}$ 、そこから負の向きに $\frac{1}{2^6}$ と進む。以下、このような運動を限りなく続けるとき、点 P の極限の位置の座標を求めよ。

15

次の循環小数を分数で表せ。

- (1) $0.\dot{6}$ (2) $0.2\dot{3}4$

極限③

(3) $0.\dot{4}70\dot{2}$

16

次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{2}{3^n} \right)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n}$

17

次の無限級数は発散することを示せ。

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{6} + \frac{5}{9} + \frac{7}{12} + \cdots + \frac{2n-1}{3n} + \cdots$$

18 【 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ の値】

次の極限を求めよ。(4) の a は 0 でない定数とする。

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x - 1)$

(2) $\lim_{x \rightarrow -2} (x-3)(x+2)$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x} \right)$

(5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

19 【極限と係数決定】

次の等式が成り立つように、定数 a , b の値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x} + b}{x-2} = -1$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\sqrt{x+4} + b}{x} = 1$

20 【極限が有限でない場合】

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} \left\{ -\frac{1}{(x+1)^2} \right\}$

極限④

21 【片側からの極限】

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

(4) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

(5) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x - 1}$

(6) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x - 1}$

22 【 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ の値】

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - x^2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 2x^2)$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3x)$

23 【分数関数の極限】

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{4x + 3}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 + 4}{2x^2 - 3x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - x^2}{3x + 2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2x}{x^2 - 4x + 1}$

24 【無理関数の極限】

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x} + 2x)$

25 【指数・対数関数の極限】

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 x$

(3) $\lim_{x \rightarrow +0} \log_{0.5} x$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-3x}$

(5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-2x}$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4x - 1}{x + 2}$

26 【三角関数の極限】

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{1}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos \frac{1}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x$

極限⑤

27

次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x}$

28

次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

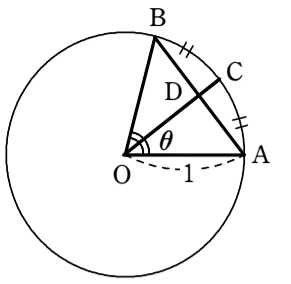
(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$

29

半径 1 の円 O の周上に中心角 θ ラジアン の弧 AB をとり、弧 AB を 2 等分する点を C とする。また、線分 OC と弦 AB の交点を D とする。弧 AB の長さを \widehat{AB} で表すとき、極限 $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{CD}{\widehat{AB}^2}$ を求めよ。



30 【関数の連続性】

次の関数 $f(x)$ が、 $x=0$ で連続であるか不連続であるかを調べよ。

(1) $f(x) = x[x]$

(2) $f(x) = (x+1)[x]$

(3) $f(x) = \sqrt{x}$

31 【区間におけるの連続】

次の関数が連続である区間を求めよ。

(1) $f(x) = \sqrt{1-x}$

(2) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

32 【区間におけるの連続】

次の区間における関数 $f(x) = \cos x$ の最大値、最小値について調べよ。

(1) $[0, \pi]$

(2) $[-\pi, \pi]$

33 【区間におけるの連続】

次の方程式は、() 内の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

(1) $x - \cos x = 0 \quad (0 < x < \pi)$

(2) $2^x - 3x = 0 \quad 3 < x < 4$