

積分法①

1 【不定積分】

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx$$

$$= \frac{1}{-2} x^{-2} + C$$

$$= -\frac{1}{2x^2} + C$$

$$(2) \int x^{\frac{4}{3}} dx$$

$$= \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + C$$

$$(3) \int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{7}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$$

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{x} + C$$

2

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{x^2 - 4x + 1}{x^3} dx$$

$$= \int (x^{-1} - 4x^{-2} + x^{-3}) dx$$

$$= \log|x| + \frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$$

$$(2) \int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int (x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}) dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + C$$

$$(3) \int \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{y} dy \quad y > 0$$

$$= \int \frac{y - 2\sqrt{y} + 1}{y} dy$$

$$= \int (1 - 2y^{-\frac{1}{2}} + y^{-1}) dy$$

$$= y - 4\sqrt{y} + \log|y| + C$$

$$= y - 4\sqrt{y} + \log y + C$$

$$(4) \int (3t^2 - \frac{1}{t})^2 dt$$

$$= \int (9t^4 - 6t + t^{-2}) dt$$

$$= \frac{9}{5} t^5 - 3t^2 - \frac{1}{t} + C$$

3

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (\cos x - 2\sin x) dx$$

$$= \sin x + 2\cos x + C$$

$$(2) \int \frac{2\cos^3 x - 1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int (2\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}) dx$$

$$= 2\sin x - \tan x + C$$

$$(3) \int 5^x dx$$

$$= \frac{5^x}{\log 5} + C$$

$$(4) \int (3^x - 2e^x) dx$$

$$= \frac{3^x}{\log 3} - 2e^x + C$$

$$(5) \int \frac{dx}{\tan^2 x} = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int (\frac{1}{\sin^2 x} - 1) dx$$

$$= -\frac{1}{\tan x} - x + C$$

4

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (3x+1)^4 dx$$

$$= \frac{1}{5} \frac{1}{3} (3x+1)^5 + C$$

$$= \frac{1}{15} (3x+1)^5 + C$$

$$(2) \int (4x-3)^{-3} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{4} (4x-3)^{-2} + C$$

$$= -\frac{1}{8} (4x-3)^{-2} + C$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$$

$$= \int (1-2x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= 2 \frac{1}{-2} (1-2x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\sqrt{1-2x} + C$$

$$(4) \int \frac{dx}{2x+1}$$

$$= \frac{1}{2} \log|2x+1| + C$$

$$(5) \int \sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2x + C$$

$$(6) \int e^{3x-1} dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x-1} + C$$

5 【置換積分法】

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int x(1-x)^4 dx$$

$1-x = t$ とおくと $\frac{dx}{dt} = -1$
 $dx = -dt$

$$= \int (t-1)t^4 dt$$

$$= \int (t^5 - t^4) dt$$

$$= \frac{1}{6} t^6 - \frac{1}{5} t^5 + C$$

$$= \frac{1}{30} t^5 (5t - 6) + C$$

$$= -\frac{1}{30} (1-x)^5 (5x+1) + C$$

$$(2) \int x\sqrt{2x-1} dx$$

$\sqrt{2x-1} = t$ とおくと $\frac{dx}{dt} = t$
 $dx = t dt$

$$= \int \frac{1}{2} (t^2+1)t \cdot t dt$$

$$= \frac{1}{2} \int (t^4 + t^2) dt$$

$$= \frac{1}{2} (\frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3) + C$$

$$= \frac{1}{10} t^5 + \frac{1}{6} t^3 + C$$

$$= \frac{1}{30} t^3 (3t^2 + 5) + C$$

$$= \frac{1}{15} (3x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$$

$$(3) \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$$

$\sqrt{x+1} = t$ とおくと $\frac{dx}{dt} = 2t$
 $dx = 2t dt$

$$= \int \frac{t^2-1}{t} \cdot 2t dt$$

$$= 2 \int (t^2-1) dt$$

$$= 2 (\frac{1}{3} t^3 - t) + C$$

$$= \frac{2}{3} t^3 - 2t + C$$

$$= \frac{2}{3} t (t^2 - 3) + C$$

$$= \frac{2}{3} (x-2)\sqrt{x+1} + C$$

積分法②

6

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x^2 \sqrt{x^3+2} dx$

$$\begin{aligned} x^3+2 &= t \quad t \text{ 対 } x \\ x^3 &= t-2 \\ \frac{dx}{dt} 3x^2 &= 1 \\ dx &= \frac{1}{3x^2} dt \\ \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt & \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{9} (x^3+2) \sqrt{x^3+2} + C \end{aligned}$$

(2) $\int \sin^3 x \cos x dx$

$$\begin{aligned} \sin x &= t \quad t \text{ 対 } x \\ \frac{dx}{dt} \cos x &= 1 \\ dx &= \frac{1}{\cos x} dt \\ \int t^3 dt &= \frac{1}{4} t^4 + C \\ &= \frac{1}{4} \sin^4 x + C \end{aligned}$$

3) $\int \frac{\log x}{x} dx$

$$\begin{aligned} \log x &= t \quad t \text{ 対 } x \\ \frac{dx}{dt} \frac{1}{x} &= 1 \\ dx &= x dt \\ \int t dt &= \frac{1}{2} t^2 + C \\ &= \frac{1}{2} (\log x)^2 + C \end{aligned}$$

7 【 $\frac{g'(x)}{g(x)}$ の不定積分】

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx$

$$= \log |x^2+x-1| + C$$

(2) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$

$$= \log |e^x+1| + C$$

(3) $\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$$= \log |\sin x| + C$$

8 【部分積分法】

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x \sin x dx$

$$\begin{aligned} &= \int x (-\cos x)' dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

(2) $\int x e^{-x} dx$

$$\begin{aligned} &= \int x (-e^{-x}) da \\ &= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx \\ &= -x e^{-x} - e^{-x} + C \\ &= -(x+1) e^{-x} + C \end{aligned}$$

9

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \log 2x dx$

$$\begin{aligned} &= \int (x)' \log 2x dx \\ &= x \log 2x - \int x \frac{1}{2x} \cdot 2 dx \\ &= x \log 2x - x + C \end{aligned}$$

(2) $\int \log x^2 dx$

$$\begin{aligned} &= \int (x)' \log x^2 dx \\ &= x \log x^2 - \int x \frac{2x}{x^2} dx \\ &= x \log x^2 - 2 \int dx \\ &= x \log x^2 - 2x + C \end{aligned}$$

(3) $\int x \log x dx$

$$\begin{aligned} &= \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{4} x^2 + C \end{aligned}$$

10

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{x^2-1}{x+2} dx$

$$\begin{aligned} &= \int \left(x-2 + \frac{3}{x+2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 - 2x + 3 \log |x+2| + C \end{aligned}$$

	x-2
1 2	1 -2
	0 -1
	1 2
	-2 -1
	-2 -4
	3

(2) $\int \frac{4x^2}{2x-1} dx$

$$\begin{aligned} &= \int \left(2x+1 + \frac{1}{2x-1}\right) dx \\ &= x^2+x + \frac{1}{2} \log |2x-1| + C \end{aligned}$$

	2x+1
2	2 1
	4 0 0
	4 -2
	2 0
	2 -1
	1

(3) $\int \frac{3}{x^2+x-2} dx$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{3}{(x+2)(x-1)} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx \\ &= \log |x-1| - \log |x+2| + C = \log \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C \end{aligned}$$

11

次の不定積分を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \int \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 2x + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x + x \right) + C \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 \\ \cos^2 x &= \frac{\cos 2x + 1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \sin^2 3x dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 6x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{6} \sin 6x \right) + C \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin 6x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 6x &= 1 - 2 \sin^2 3x \\ \sin^2 3x &= \frac{1 - \cos 6x}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int \sin x \cos x dx &= \int \frac{1}{2} \sin 2x dx \\ &= -\frac{1}{4} \cos 2x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int \cos 3x \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 5x + \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \sin 5x + \sin x \right) + C \\ &= \frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(3x+2x) &= \cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x \\ \cos(3x-2x) &= \cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x \\ 2 \cos 3x \cos 2x &= \cos 5x + \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int \sin x \sin 3x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + C \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(3x+x) &= \cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x \\ \cos(3x-x) &= \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x \\ 2 \sin 3x \sin x &= \cos 2x - \cos 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \int \sin 3x \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 5x + \sin x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + C \\ &= -\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(3x+2x) &= \sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x \\ \sin(3x-2x) &= \sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x \\ 2 \sin 3x \cos 2x &= \sin 5x + \sin x \end{aligned}$$

12 【定積分】

次の定積分を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \int_1^2 \frac{dx}{x^2} &= \int_1^2 x^{-2} dx \\ &= -[x^{-1}]_1^2 \\ &= -\left(\frac{1}{2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx &= \int_1^8 x^{\frac{1}{3}} dx \\ &= \frac{3}{4} [x^{\frac{4}{3}}]_1^8 \\ &= \frac{3}{4} (16 - 1) \\ &= \frac{45}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta &= [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int_0^1 e^x dx &= [e^x]_0^1 \\ &= e - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} &= [\log|x|]_{-2}^{-1} \\ &= \log 1 - \log 2 \\ &= -\log 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \int_{-1}^1 2^x dx &= \left[\frac{2^x}{\log 2} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{2 \log 2} \\ &= \frac{3}{2 \log 2} \end{aligned}$$

13

次の定積分を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \int_1^2 \sqrt{x+1} dx &= \int_1^2 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{2}{3} [(x+1)^{\frac{3}{2}}]_1^2 \\ &= \frac{2}{3} (3^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}) \\ &= \frac{2}{3} (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^1 (2x+1)^3 dx &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} [(2x+1)^4]_0^1 \\ &= \frac{1}{8} (81 - 1) \\ &= \frac{10}{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_{-1}^1 (e^t - e^{-t}) dt &= [e^t + e^{-t}]_{-1}^1 \\ &= \left(e + \frac{1}{e}\right) - \left(\frac{1}{e} + e\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int_0^{\pi} \sin 2x dx &= \frac{1}{2} [-\cos 2x]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} (-1 + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 2x + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2x + x \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 6\theta + \sin 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{6} \cos 6\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

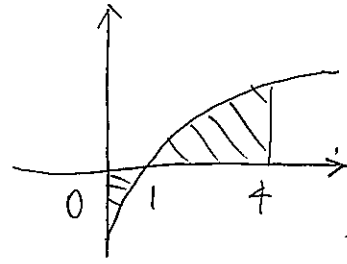
積分法④

14 【絶対値のついた定積分】

次の定積分を求めよ。

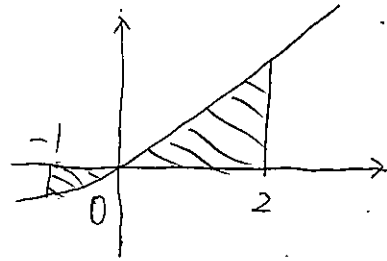
(1) $\int_0^4 |\sqrt{x}-1| dx$

$$\begin{aligned} &= -\int_0^1 (\sqrt{x}-1) dx + \int_1^4 (\sqrt{x}-1) dx \\ &= -\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right]_1^4 \\ &= -\left(\frac{2}{3}-1\right) + \left(\frac{16}{3}-4\right) - \left(\frac{2}{3}-1\right) \\ &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \\ &= \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$



(2) $\int_{-1}^2 |e^x-1| dx$

$$\begin{aligned} &= -\int_{-1}^0 (e^x-1) dx + \int_0^2 (e^x-1) dx \\ &= -[e^x-x]_{-1}^0 + [e^x-x]_0^2 \\ &= -\left\{1 - \left(\frac{1}{e}+1\right)\right\} + e^2 - 2 - 1 \\ &= \frac{1}{e} + 1 + e^2 - 4 = \underline{\underline{e^2 + \frac{1}{e} - 3}} \end{aligned}$$



15 【置換積分】

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1 x(1-x)^5 dx$

$1-x=t \quad \varepsilon \pi <$
 $x=1-t$
 $\frac{dx}{dt} = -1$
 $dx = -dt$

$\frac{x}{t} \begin{matrix} 0 \rightarrow 1 \\ 1 \rightarrow 0 \end{matrix}$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (1-t)t^5 dt = \int_0^1 (t^5 - t^6) dt \\ &= \left[\frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{7}t^7\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{42}}} \end{aligned}$$

(2) $\int_2^5 x\sqrt{x-1} dx$

$\sqrt{x-1}=t \quad \varepsilon \pi <$
 $x-1=t^2$
 $x=t^2+1$

$\frac{dx}{dt} = 2t$
 $dx = 2t \cdot dt$
 $\frac{x}{t} \begin{matrix} 2 \rightarrow 5 \\ 1 \rightarrow 2 \end{matrix}$

$$\begin{aligned} &2\int_1^2 (t^2+1)t^2 dt = 2\int_1^2 (t^4+t^2) dt \\ &= 2\left[\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right]_1^2 \\ &= 2\left\{\frac{32}{5} + \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)\right\} \\ &= 2\left(\frac{31}{5} + \frac{7}{3}\right) \\ &= \underline{\underline{\frac{256}{15}}} \end{aligned}$$

16 $[\sqrt{a^2-x^2}, \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}]$ の定積分

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$

$x = \sin \theta \quad \varepsilon \pi <$

$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$

$dx = \cos \theta d\theta$

$\frac{x}{\theta} \begin{matrix} -1 \rightarrow 1 \\ -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{matrix}$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$

$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta$

$= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$

$= \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$

(2) $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx$

$x = 2 \sin \theta \quad \varepsilon \pi <$

$\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta$

$dx = 2 \cos \theta d\theta$

$\frac{x}{\theta} \begin{matrix} -1 \rightarrow \sqrt{3} \\ -\frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{3} \end{matrix}$

$= 2 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= 2 \left\{ \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right\}$

$= 2 \left(\frac{2}{6} \pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

$= 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4-4\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = 2 \left(\frac{1}{2} \pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

$= 4 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta d\theta$

$= \underline{\underline{\pi + \sqrt{3}}}$

$= 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\theta) d\theta$

(3) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$x = 2 \sin \theta \quad \varepsilon \pi <$

$\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta$

$dx = 2 \cos \theta d\theta$

$\frac{x}{\theta} \begin{matrix} 1 \rightarrow \sqrt{3} \\ \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{3} \end{matrix}$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{4-4\sin^2 \theta}} d\theta$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$

積分法⑤

17 【 $\frac{1}{x^2+a^2}$ の定積分】

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$

$x = \tan \theta$ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

$dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$

$x|_0 \rightarrow \sqrt{3}$
 $\theta|_0 \rightarrow \frac{\pi}{3}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

(2) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2+4}$

$x = 2 \tan \theta$

$\frac{dx}{d\theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta}$

$dx = \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta$

$x|-2 \rightarrow 2$
 $\theta|-\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

18 【偶関数, 奇関数】

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^2 (x^3 + 3x^2 + 4x + 5) dx$

$= 2 \int_0^2 (3x^2 + 5) dx$

$= 2 \left[x^3 + 5x \right]_0^2$

$= 2 - 18$

$= \underline{\underline{-36}}$

(3) $\int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2} dx$

$= \underline{\underline{0}}$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

(2) $\int_{-1}^1 (e^x - e^{-x}) dx$

$= \underline{\underline{0}}$

(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx$

$= \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{2}$

19 【部分積分】

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\pi} x \sin x dx$

$= \int_0^{\pi} x (-\cos x) dx$

$= \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx$

$= \pi + \left[\sin x \right]_0^{\pi}$

$= \underline{\underline{\pi}}$

(2) $\int_0^1 x e^x dx$

$= \int_0^1 x (e^x)' dx$

$= \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$= e - \left[e^x \right]_0^1$

$= e - (e - 1) = \underline{\underline{1}}$

(3) $\int_1^2 x \log x dx$

$= \int_1^2 \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \log x dx$

$= \frac{1}{2} \left[x^2 \log x \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$

$= \frac{1}{2} \cdot 4 \log 2 - \frac{1}{4} \left[x^2 \right]_1^2$

$= 2 \log 2 - \frac{3}{4}$

20 ~~置換~~ $z = x+1$ による

部分積分法によって, 定積分 $\int_{-1}^1 (x+1)^3(x-1) dx$ を求めよ。

$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{4} (x+1)^4 \right]' (x-1) dx$

$= \frac{1}{4} \left[(x+1)^4 (x-1) \right]_{-1}^1 - \frac{1}{4} \left[(x+1)^4 \right]_{-1}^1$

$= -\frac{1}{20} \left[(x+1)^5 \right]_{-1}^1$

$= -\frac{1}{20} \cdot 2^5$

$= -\frac{32}{20}$

$= -\frac{8}{5}$

21

定積分 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$ を求めよ。

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \cos x dx \\ &= [e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \sin x dx \\ &= -1 + [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \\ &= -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - J \\ 2J &= -1 + e^{\frac{\pi}{2}} \\ J &= \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2} \end{aligned}$$

22

n は 0 または正の整数とする。定積分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ について、次の問いに答えよ。

ただし、 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$ である。

(1) I_0, I_1 を求めよ。

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

(2) $n \geq 2$ のとき、 $\sin^n x = \sin^{n-1} x \sin x = \sin^{n-1} x (-\cos x)'$ である。

I_n に部分積分法を適用して、次のことを示せ。

$n \geq 2$ のとき $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (-\cos x)' dx \\ &= -[\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx \\ &= (n-1) \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right\} \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

(3) $n \geq 2$ のとき、次のことを示せ。

$$n \text{ が偶数のとき } I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$n \text{ が奇数のとき } I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$(2) \text{ により } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$n \text{ が偶数 } n \text{ とする } I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$n \text{ が奇数 } n \text{ とする } I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

23 【定積分と導関数】

次の関数を x で微分せよ。ただし、(2) では $x > 0$ とする。

(1) $\int_0^x \sin t dt$

$$= \cos x$$

(2) $\int_1^x t \log t dt$

$$= x \log x$$

24

関数 $G(x) = \int_0^x (x-t)e^t dt$ について、 $G(x)$ および $G'(x)$ を求めよ。

$$G(x) = x \int_0^x e^t dt - \int_0^x t e^t dt$$

$$G'(x) = \int_0^x e^t dt + x e^x - x e^x$$

$$= [e^t]_0^x$$

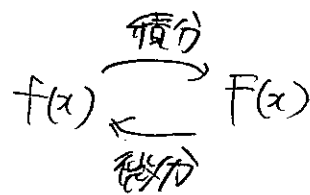
$$= e^x - 1$$

$$G''(x) = e^x$$

25

関数 $\int_x^{3x} t \cos t dt$ を x で微分せよ。

$$f(t) = t \cos t \quad \text{とおく}$$



$$\int_x^{3x} f(t) dt = F(3x) - F(x)$$

両辺を微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_x^{3x} f(t) dt &= 3f(3x) - f(x) \\ &= 3 - 3x \cos 3x - x \cos x \\ &= 9x \cos 3x - x \cos x \end{aligned}$$

26

等式 $f(x) = x + \int_0^1 f(t)e^t dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$a = \int_0^1 f(t)e^t dt \quad \text{とおく}$$

$$f(x) = x + a$$

$$f(t) = t + a$$

$$a = \int_0^1 (t+a)e^t dt$$

$$= \int_0^1 (t+a)(e^t)' dt$$

$$= [(t+a)e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt$$

$$= (1+a)e - a - (e-1)$$

$$= e + ae - a - e + 1$$

$$\Rightarrow a - ae = 1$$

$$a = \frac{1}{2-e}$$

$$\therefore f(x) = x + \frac{1}{2-e}$$

27 【区分求積法】

右図のように区間 [0, 1] を n 等分して n 個の長方形を作り、それらの面積の和を S_n とする。

長方形の面積の和を T_n とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = S$

となることを示せ。

$$T_n = \frac{1}{n} \left\{ 0 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \right\}$$

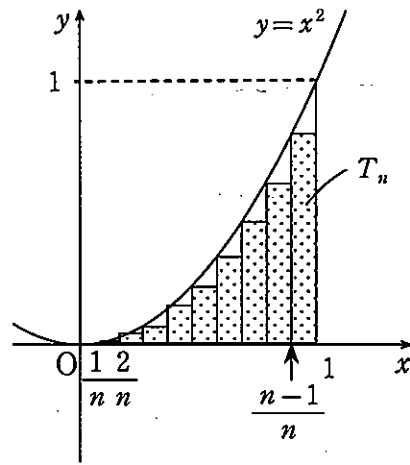
横線

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1)$$

$I > 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$$



$$S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$I > 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = S$$

28

次の極限値を求めよ。

(1) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} (1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{2}{n}\right)^4 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^4 \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (f(x) = x^4)$$

$$= \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} [x^5]_0^1 = \frac{1}{5}$$

(2) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{n}{n}} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \quad f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\log|1+x|]_0^1 = \log 2$$

29 【定積分と不等式】

次のことを示せ。

(1) $x \geq 0$ のとき $\frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x^2+x+1}$

$$x+1 \leq x^2+x+1$$

両辺 \oplus x^2 " 逆数 \leq $>$

$$\frac{1}{x^2+x+1} \leq \frac{1}{x+1}$$

(2) $\log 2 > \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$

(1) \neq

$$\frac{1}{x+1} > \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx > \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

$I > 2$

$$\log 2 > \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$$

30

関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ の定積分を利用して、次の不等式を証明せよ。

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \log(n+1) \quad \text{ただし、} n \text{ は自然数}$$

$$k \leq x \leq k+1 \quad (k: \text{自然数})$$

逆数 \leq

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{k}$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{k}$$

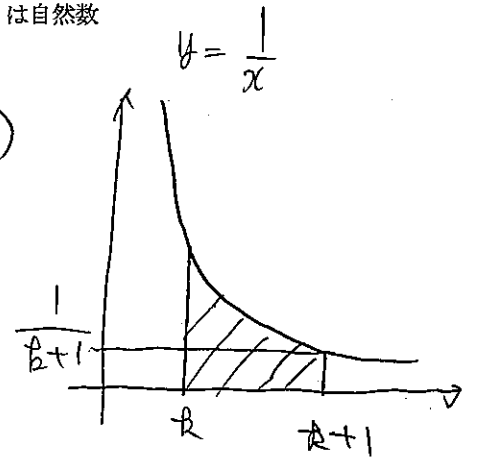
$$\frac{1}{k} > \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ のとき両辺をたすと

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

$$= [\log|x|]_1^{n+1}$$

$$= \log(n+1)$$



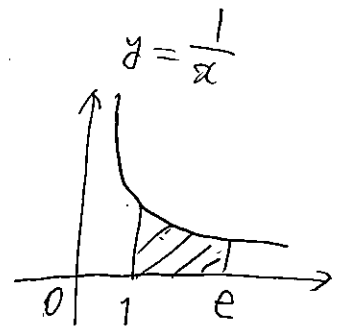
31

次の2直線、および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y = \frac{1}{x}, x=1, x=e$

$$S = \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$= [\log x]_1^e = 1$$

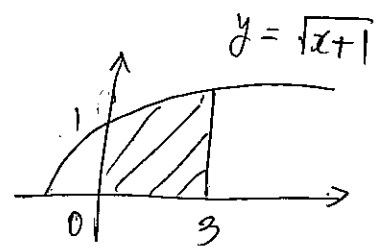


(2) $y = \sqrt{x+1}, x=0, x=3$

$$S = \int_0^3 \sqrt{x+1} dx$$

$$= \frac{2}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (8-1) = \frac{14}{3}$$



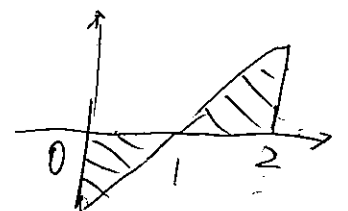
32

曲線 $y = e^x - e$ と x 軸および2直線 $x=0, x=2$ で囲まれた2つの部分の面積の和 S を求めよ。

$$e^x - e = 0 \quad x = \frac{1}{2} \text{ かつ } x = 2$$

$$e^x = e \quad y = \frac{1}{e} - e < 0$$

$$x-1$$



$$S = -\int_0^{1/2} (e^x - e) dx + \int_{1/2}^2 (e^x - e) dx$$

$$= -[e^x - 1]_0^{1/2} + [e^x - 1]_{1/2}^2$$

$$= -(e-1) + (e^2-1) - (e-1) = e^2 - 2e + 1$$

33

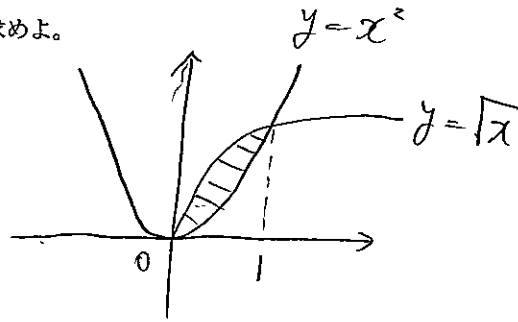
次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2, y=\sqrt{x}$

①②より
 $x^2 = \sqrt{x}$
 $x = 0, 1$

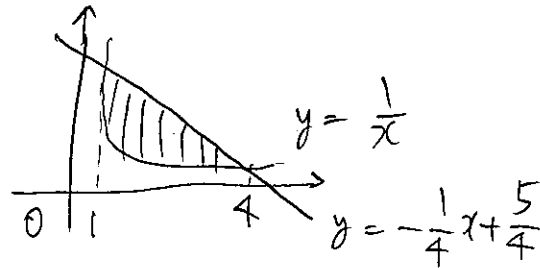
$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$



(2) $x+4y=5, xy=1$

$4y = -x + 5$
 $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$



①②より

$$x \left(-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \right) = 1$$

$$S = \int_1^4 \left(-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x - 1 = 0$$

$$= - \int_1^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \right) dx$$

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + 1 = 0$$

$$= - \left[\log|x| + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x \right]_1^4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$= - \left(\log 4 + 2 - 5 - \frac{1}{8} + \frac{5}{4} \right)$$

$$(x-4)(x-1) = 0$$

$$x = 1, 4$$

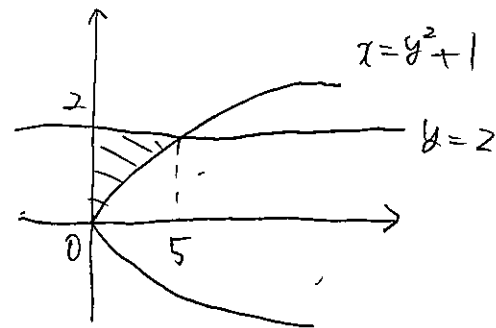
$$= \frac{15}{8} - 2 \log 2$$

34

次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $x=y^2+1, x$ 軸, y 軸, $y=2$

$$S = \int_0^2 (y^2+1) dy$$

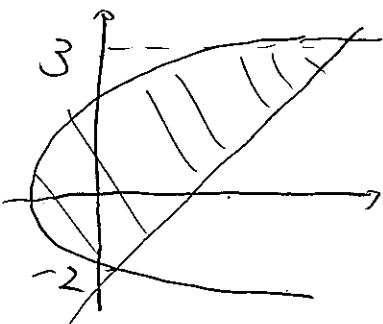


$$= \left[\frac{y^3}{3} + y \right]_0^2$$

$$= \frac{14}{3}$$

(2) $x=y^2-1, x=y+5$

①②より
 $y^2-1 = y+5$



$$y^2 - y - 6 = 0$$

$$(y-3)(y+2) = 0$$

$$y = -2, 3$$

$$S = \int_{-2}^3 - (y-3)(y-2) dy = \frac{(3+2)^3}{6} = \frac{125}{6}$$

35

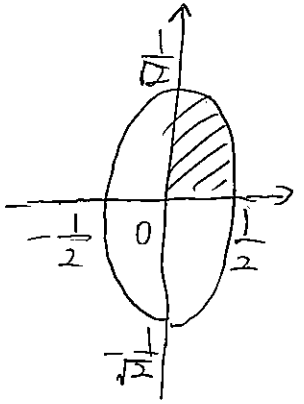
曲線 $4x^2+2y^2=1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

$$2y^2 = 1 - 4x^2$$

$$y^2 = \frac{1}{2}(1 - 4x^2)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 4x^2}$$



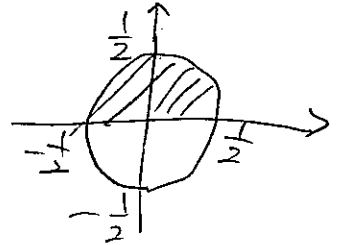
$$S = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - 4x^2} dx$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \pi$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \pi$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

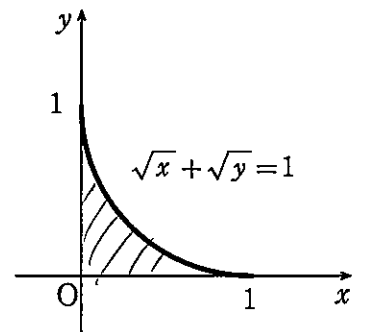


36

曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ は右の図のようになる。この曲線と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}$$

$$y = (1 - \sqrt{x})^2$$



$$S = \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 dx$$

$$= \int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x) dx$$

$$= \left[x - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

37 【媒介変数表示の曲線と面積】

次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$x = 3\cos\theta, y = 2\sin\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

$$\int_{-3}^3 y dx \quad \frac{dx}{d\theta} = -3\sin\theta$$

$$\theta \mid 0 \rightarrow \pi$$

$$= \int_0^\pi 2\sin\theta \cdot (-3\sin\theta) d\theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$= 6 \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

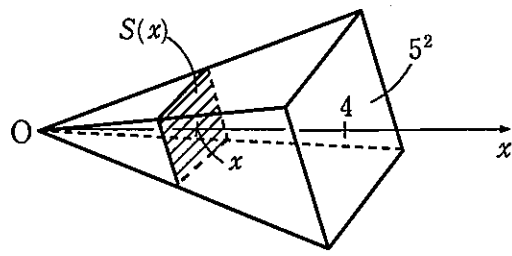
$$= 3 \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$= 3 \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi$$

$$= 3\pi$$

38 【角錐の体積と定積分】

四角錐の頂点を原点 O とし、頂点から底面に下ろした垂線を x 軸にとる。
 $0 \leq x \leq 4$ として、 x 軸上で座標が x である点を通り、 x 軸に垂直な平面でこの立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とする。
 1 辺の長さが 5 の正方形を底面とする高さ 4 の四角錐の体積 V を求めよ。



断面：底面 = $x : 4$

断面積：底面積 = $x^2 : 4^2$

$S(x) : 5^2 = x^2 : 4^2$

$S(x) = \frac{25x^2}{16}$

$V = \int_0^4 S(x) dx$

$= \frac{25}{16} \int_0^4 x^2 dx$

$= \frac{25}{48} [x^3]_0^4$

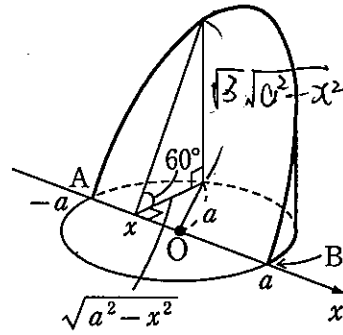
$= \frac{25 \cdot 4^3}{48}$

$= \frac{100}{3}$

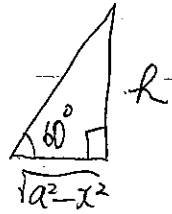
解答 $\frac{100}{3}$

39 【断面積 $S(x)$ と立体の体積 V 】

右図のように、底面の半径 a の直円柱を、底面の直径を含み底面と 60° の角をなす平面で切断する。
 底面の直径 AB を x 軸に、中心を原点 O にとる。
 座標が x ($-a \leq x \leq a$) である点を通り、 x 軸に垂直な平面で題意の立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とする。
 このとき、底面とこの平面で挟まれた部分の体積 V を求めよ。



直円柱の高さ



$h = \sqrt{3} \sqrt{a^2 - x^2}$

断面積

$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{a^2 - x^2}$

体積

$V = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[a^2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-a}^a = \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ a^3 - \frac{1}{3}a^3 - \left(-a^3 + \frac{1}{3}a^3 \right) \right\}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3$

解答 $\frac{2\sqrt{3}}{3} a^3$

40

$a > 0, b > 0$ とする。楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれた図形が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

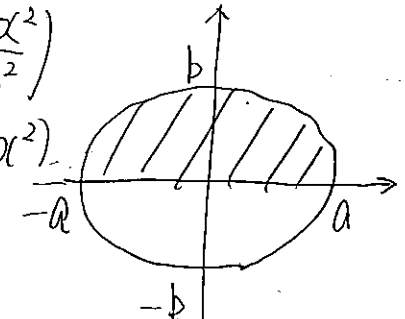
$V = \pi \int_{-a}^a y^2 dx$

$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$

$= \frac{\pi b^2}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx$

$= \frac{\pi b^2}{a^2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3$

$= \frac{4}{3} ab^2 \pi$



41 【 y 軸の周りの回転体の体積】

次の曲線と直線で囲まれた部分が、 y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

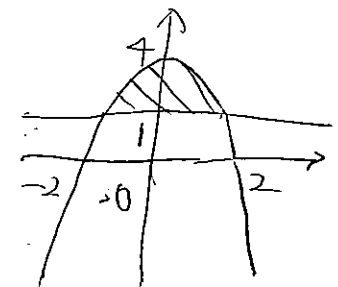
(1) $y = 4 - x^2, y = 1$

$V = \pi \int_1^4 x^2 dy$

$= \pi \int_1^4 (4 - y) dy$

$= \pi \left[4y - \frac{1}{2}y^2 \right]_1^4$

$= \pi \left\{ (16 - 8) - \left(4 - \frac{1}{2} \right) \right\} = \frac{9}{2} \pi$



(2) $y = 1 - \sqrt{x}, x$ 軸

$x = -\sqrt{x} + 1$

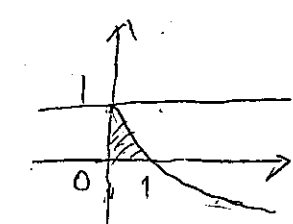
$\sqrt{x} = 1 - y$

$x^2 = (1 - y)^4$

$V = \pi \int_0^1 x^2 dy$

$= \pi \int_0^1 (1 - y)^4 dy$

$= -\frac{1}{5} \pi \left[(1 - y)^5 \right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$



42 【円環体】

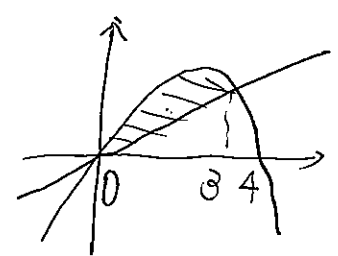
放物線 $y = 4x - x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分が、 x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$y = -x^2 + 4x$
 $= -x(x - 4)$

$x = 4x - x^2$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$



$V = \pi \int_0^3 (4x - x^2)^2 dx - \pi \int_0^3 x^2 dx$

$= \pi \left\{ \int_0^3 (16x^2 - 8x^3 + x^4) dx - \int_0^3 x^2 dx \right\}$

$= \pi \left\{ \int_0^3 (16x^2 - 8x^3 + x^4) dx - \int_0^3 x^2 dx \right\}$

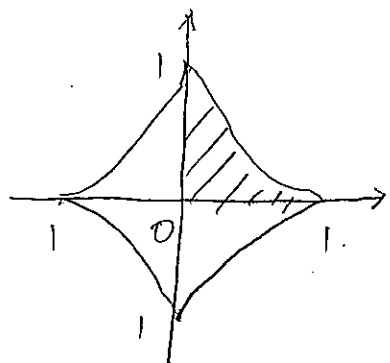
$= \pi \int_0^3 (15x^2 - 8x^3 + x^4) dx$

$= \pi \left[5x^3 - 2x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^3 = \frac{198}{5} \pi$

43 【媒介変数表示された曲線と回転体の体積】

アステロイド $x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) で囲まれた図形が、 x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$$V = 2\pi \int_0^1 y^2 dx$$



$$\frac{dx}{d\theta} = 3\cos^2\theta \cdot (-\sin\theta)$$

$$dx = -3\sin\theta \cos^2\theta d\theta$$

$$\begin{array}{l} \theta | \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \\ x | 0 \rightarrow 1 \end{array}$$

$$V = 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta \cos^2\theta d\theta$$

$$= 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta (1 - \sin^2\theta) d\theta$$

$$= 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^6\theta - \sin^8\theta) d\theta$$

$$= 6\pi \left(\frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \right)$$

$$= 6\pi \left(\frac{9 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 - 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \right)$$

$$= \frac{2(9-8)6 \cdot 4 \cdot 2}{9 \cdot 7 \cdot 5} \pi = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 7 \cdot 5} \pi = \frac{48}{105} \pi$$

44 【速度と位置】

数直線上を運動する点 P の速度が、時刻 t の関数として $v = 4 - 2t$ で与えられている。 $t = 0$ における P の座標が 2 であるとき、 $t = 3$ のときの P の座標を求めよ。

$$x = 2 + \int_0^3 (4 - 2t) dt$$

$$= 2 + [4t - t^2]_0^3$$

$$= 5$$

45 【数直線上の運動と道のり】

数直線上を運動する点 P があり、時刻 t における P の速さは $v = \sin 2t$ であるとする。 $t = 0$ から $t = \pi$ までに P が通過する道のり s を求めよ。

$$s = \int_0^{\pi} |\sin 2t| dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t) dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin 2t) dt$$

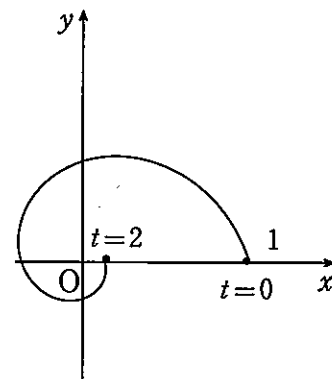
$$= \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2} \cos 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 2$$

46 【座標平面上の運動と道のり】

座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 (x, y) が $x = e^{-t} \cos \pi t, y = e^{-t} \sin \pi t$ で表されるとき、 $t = 0$ から $t = 2$ までに P が通過する道のり s を求めよ。



$$s = \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t} \cos \pi t - e^{-t} \sin \pi t \cdot \pi$$

$$= -e^{-t} (\cos \pi t + \pi \sin \pi t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -e^{-t} \sin \pi t + e^{-t} \pi \cos \pi t$$

$$= -e^{-t} (\sin \pi t - \pi \cos \pi t)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = e^{-2t} \{ \sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t + \pi^2 (\sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t) \}$$

$$= e^{-2t} (1 + \pi^2)$$

$$s = \sqrt{1 + \pi^2} \int_0^2 e^{-t} dt = \sqrt{1 + \pi^2} [-e^{-t}]_0^2$$

$$= \sqrt{1 + \pi^2} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$$

47 【サイクロイドの長さ】

曲線 $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) の長さ L を求めよ。

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$\frac{dx}{dt} = 2(1 - \cos t) \quad \frac{dy}{dt} = 2 \sin t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + 4\sin^2 t$$

$$= 4 - 8\cos t + 4$$

$$= 8(1 - \cos t)$$

$$L = \sqrt{8} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt$$

$$= \sqrt{8} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} dt$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -8 \left[\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = -8(-1 - 1) = 16$$

48 【曲線の長さ】

曲線 $y = x\sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 5$) の長さ L を求めよ。

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$$

$$y = x^{\frac{3}{2}} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 9} \left[\left(1 + \frac{9}{4}x \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^5$$

$$= \frac{8}{27} \left\{ \left(\frac{49}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\}$$

$$= \frac{8}{27} \left(\frac{343}{8} - \frac{8}{8} \right)$$

$$= \frac{335}{27}$$