第5章　微分法

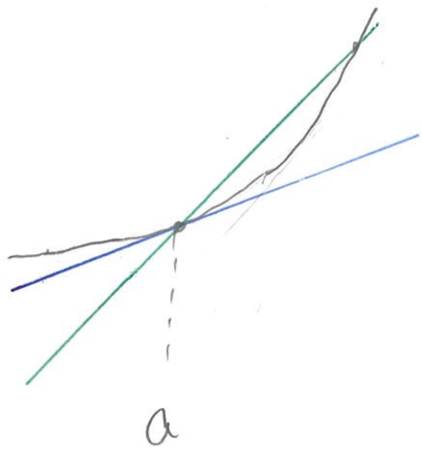
導関数

微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

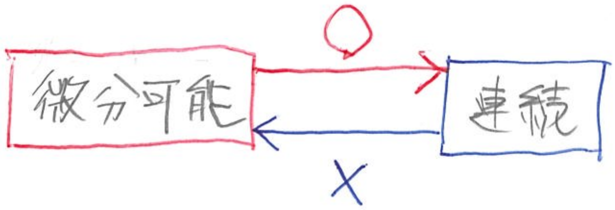
平均変化率

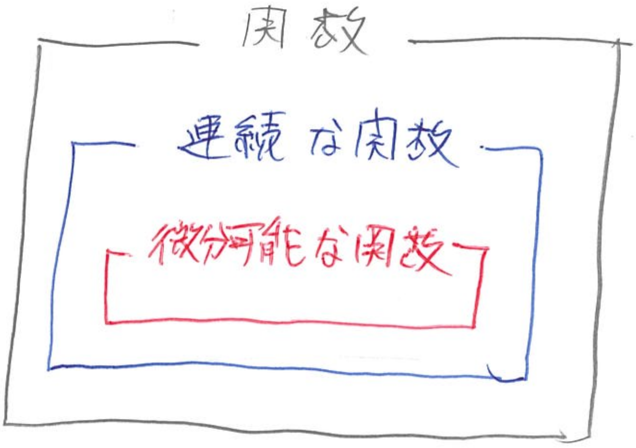
$x=a$ における接線の傾き



1　2

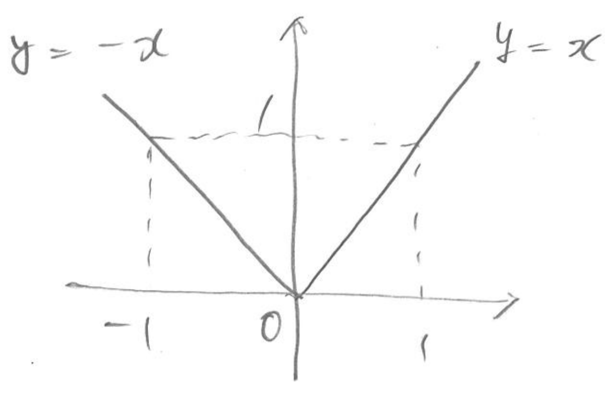
微分可能と連続





反例

$f(x)=|x|$



3

導関数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) \xrightarrow{\text{微分}} \underline{f'(x)} \xrightarrow{x=a} \underline{f'(a)}$$

導関数　　　微分係数

$x=a$ における
接線の傾き.

積・商の微分　　$\boxed{4}$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

とくに $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$

$$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$

$\boxed{5} \sim \boxed{8}$

合成関数の微分

$y=f(u)$, $u=g(x)$ の合成関数

$y=f(g(x))$ の導関数は

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{\boxed{du}}\cdot\frac{\boxed{du}}{dx}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[rr, bend right, "f'(g(x))"'] & u \arrow[r, bend left, "f"] & y \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\{f(g(x))\}'=f'(g(x))\,g'(x)}$$

ex

$$y=(\boxed{4-3x})^5$$

$$y'=5(\boxed{4-3x})^4\,(\boxed{4-3x})'$$

$$=-15(4-3x)^4$$

$\boxed{9}$ $\boxed{10}$

$\boxed{12}$ ~ $\boxed{14}$

逆関数の微分

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

$\frac{dy}{dx}$ は「関数 y を x で微分したもの」

$\frac{dx}{dy}$ は「関数 x を y で微分したもの」

ex

y が x の関数で $x=y^2+2y-1$ が成り立つとき、

$\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

（解答）

$$x=y^2+2y-1$$

$$\frac{dx}{dy}=2y+2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2(y+1)} \quad /\!/$$

$\boxed{11}$.

（別解①）

$$x=y^2+2y-1$$

$$1=\frac{dy}{dx}2y+\frac{dy}{dx}2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2(y+1)} \quad /\!/$$

（別解②）

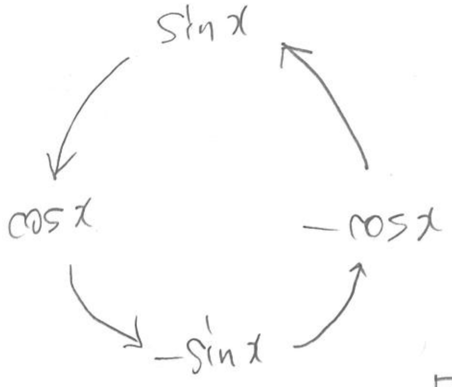
$$x=y^2+2y-1$$

$$\frac{dx}{dy}=2y+2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2(y+1)} \quad /\!/$$

三角関数の導関数

$$\boxed{\begin{aligned}(\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \\ (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}}$$



$\boxed{14}$ $\boxed{15}$

$(\sin x)' = \cos x$

$$\boxed{\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

（証明）

和 → 積 の公式より

$$\boxed{\sin(x+h) - \sin x = 2\cos\frac{(x+h)+x}{2}\sin\frac{(x+h)-x}{2}}$$

$$= 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

$f(x) = \sin x$ とおく

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ 導関数の定義

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\sin(x+h)-\sin x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{2}{h}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\right\}$$

$\frac{h}{2} = t$ とおく

$$= \lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{t}\cos(x+t)\sin t\right\}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$= \lim_{t\to 0}\left\{\boxed{\frac{\sin t}{t}}\cos(x+t)\right\}$$

$$= \cos x$$

（証明終）

対数関数・指数関数の導関数

① eの定義

$$e = \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ex.

$$\lim_{x \to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

$x \longrightarrow 0$

$t \longrightarrow 0$

$2x = t$ とおく

$$\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{2}{t}} = \lim_{t \to 0} \left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^2$$

$$= e^2 \;//$$

② 対数関数の導関数

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

$$(\log |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

ex.

(1) $(\log_2 x)' = \dfrac{1}{x \log 2} \;//$

(2) $(\log |x^2-1|)' = \dfrac{(x^2-1)'}{x^2-1}$

$$= \frac{2x}{x^2-1} \;//$$

③ 指数関数の導関数

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \log a$$

ex.

$$(2^x)' = 2^x \log 2 \;//$$

$\boxed{16} \sim \boxed{20}$

$\boxed{25}$

$$e = \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} , \quad (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$f(x) = \log_a x$ とする

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h}$$ 導関数の定義.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(\frac{x+h}{x} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)$$

$\frac{h}{x} = t$ とおく $\quad h \longrightarrow 0$, $t \longrightarrow 0$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{xt} \log_a (1+t)$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{t \to 0} \log_a (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$$\boxed{e = \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}}$$

$e = 2.71828 \cdots$

$$= \frac{1}{x} \log_a e$$

$a = e$ のとき $\quad f'(x) = \boxed{(\log x)' = \frac{1}{x}}$

$$\Rightarrow \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}}$$

$(e^x)' = e^x$

$y = e^x$

$x = \log y$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \quad \therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = y = e^x}$$

高次導関数

2次導関数

関数	$f(x)$	
		$\downarrow$ 微分
第1次導関数	$f'(x)$	
		$\downarrow$ 微分
第2次導関数	$f''(x)$	

$$f''(x),\ y'',\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d}{dx^2}f(x)$$

第n次導関数

$$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n},\ \frac{d^n}{dx^n}f(x)$$

ex. $\boxed{21}$ $\boxed{22}$

$y=\sin x$ の第n次導関数

$$y^{(n)}=\begin{cases}\sin x & (n=4k)\\ \cos x & (n=4k+1)\\ -\sin x & (n=4k+2)\\ -\cos x & (n=4k+3)\end{cases}\quad (k=0,1,2\cdots)$$

$y=\sin x$

$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left\{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right\}=\sin(x+\pi)$

$y'''=\cos(x+\pi)=\sin\left\{(x+\pi)+\frac{\pi}{2}\right\}=\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)$

$\vdots$

$y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$ 証明 → 数学的帰納法.