1 【接線の方程式】

次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ。

(1) $y=\frac{4}{x}$, A$(-1,\ -4)$

傾き

$f'(x)=-\frac{4}{x^2}$

$f'(-1)=-4$

接線

$y+4=-4(x+1)$

$y=-4x-8$

(2) $y=\tan x$, A$(0,\ 0)$

傾き

$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

$f'(0)=1$

接線

$y=x$

2

曲線 $y=e^x$ について，次のような接線の方程式を求めよ。

(1) 傾きが 1 である

接点 $(a,\ e^a)$

傾き

$f'(x)=e^x$

$f'(a)=e^a=1 \quad \therefore a=0$

接点 $(0,\ 1)$

接線 $y=x+1$

(2) 点 $(1,\ 0)$ を通る

接点 $(a,\ e^a)$

傾き

$f'(a)=e^a$

接線

$y-e^a=e^a(x-a)$

$(1,\ 0)$ を通るので

$-e^a=e^a(1-a)$

$e^a(2-a)=0$

$a=2$

$\therefore y=e^2(x-2)+e^2$

$y=e^2x-e^2$

3

次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ。

(1) 楕円 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$, A$(-1,\ 2)$

$x+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{y}{4}=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{y}$

接点 $(-1,\ 2)$ における

接線の傾きは

$\frac{4}{2}=2$

よって

$y-2=2(x+1)$

$y=2x+4$

(2) 双曲線 $x^2-y^2=1$, A$(\sqrt{2},\ -1)$

$2x-\frac{dy}{dx}\cdot 2y=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$

接点 $(\sqrt{2},\ -1)$ における

接線の傾きは

$-\sqrt{2}$

よって

$y+1=-\sqrt{2}(x-\sqrt{2})$

$y=-\sqrt{2}x+1$

4 【法線の方程式】

次の曲線上の点 A における法線の方程式を求めよ。

(1) $y=\frac{2}{x}$, A$(1,\ 2)$

傾き

$f'(x)=-\frac{2}{x^2}$

$f'(1)=-2$

$\therefore \frac{1}{2}$

法線

$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

(2) $y=\sin x$, A$(\frac{\pi}{6},\ \frac{1}{2})$

傾き

$f'(x)=\cos x$

$f'(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore -\frac{2}{\sqrt{3}}$

法線

$y-\frac{1}{2}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$y=-\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{2}$

5 【共通接線】

2 つの曲線 $y=ax^2+b$ (f), $y=\log x$ (g) が，点 A$(e,\ 1)$ を共有し，かつ点 A で共通な接線をもつように，定数 a, b の値を定めよ。

A$(e,\ 1)$ は $f(x)$ 上にあるので

$1=ae^2+b$

$b=1-ae^2$ ―― ①

$\therefore f(x)=ax^2+1-ae^2$

傾き

$f'(x)=2ax$

$f'(e)=2ae$

$g(x)=\log x$

傾き

$g'(x)=\frac{1}{x}$

$g'(e)=\frac{1}{e}$

$\therefore 2ae=\frac{1}{e}$

$2a=\frac{1}{e^2}$

$a=\frac{1}{2e^2}$

① に代入

$b=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

よって

$a=\frac{1}{2e^2},\ b=\frac{1}{2}$

6 【平均値の定理】

次の場合に，平均値の定理における c の値を求めよ。

$f(x)=x^3$, $a=-1$, $b=2$

$\frac{f(2)-f(-1)}{2+1}=f'(c) \quad (-1<c<2)$

$\frac{8+1}{3}=3c^2$

$c^2=1$

$\therefore c=1$

7

平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

$a<b$ のとき　$e^a<\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$

$f(x)=e^x$ とおく

$[a,b]$ で平均値の定理より

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^c \quad (a<c<b)$$

e^x は増加関数より

$$e^a<e^c<e^b$$

よって

$$e^a<\frac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$$

8 【関数の増減】

次の関数の増減を調べよ。

(1) $f(x)=x-e^x$

$f'(x)=1-e^x$

$f'(x)=0$ のとき

$e^x=1$

$x=0$

x	…	0	…
f'	+	0	−
f	↗	−1	↘

$x\leqq 0$ で増加

$0\leqq x$ で増加 //

(2) $f(x)=x-\log x$　$(x>0)$

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=0$ のとき

$\dfrac{1}{x}=1$

$x=1$

x	0	…	1	…
f'	╲	−	0	+
f	╲	↘	1	↗

$0<x\leqq 1$ で減少

$1\leqq x$ で増加 //

(3) $f(x)=x+\sin x$　$(0\leqq x\leqq\pi)$

$f'(x)=1+\cos x$

$f'(x)=0$ のとき

$\cos x=-1$

$x=\pi$

x	0	…	π
f'	0	+	0
f	0	↗	π

常に増加 //

9 【関数の極大と極小】

次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x)=x^2e^{-x}$

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$

$f'(x)=0$ のとき

$e^{-x}(2x-x^2)=0$

$e^{-x}x(2-x)=0$

$x=0,2$

x	…	0	…	2	…
f'	−	0	+	0	−
f	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘

極小値　0　$(x=0)$

極大値　$\dfrac{4}{e^2}$　$(x=2)$ //

(2) $f(x)=x\log x$　$(x>0)$

$f'(x)=\log x+1$

$f'(x)=0$ のとき

$\log x=-1$

$x=\dfrac{1}{e}$

x	0	…	$\frac{1}{e}$	…
f'	╱	−	0	+
f	╱	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

極小値　$-\dfrac{1}{e}$　$\left(x=\dfrac{1}{e}\right)$ //

(3) $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$　$(x\neq 0)$

$f'(x)=1-\dfrac{2}{x^2}$

$f'(x)=0$ のとき

$x=\pm\sqrt{2}$

x	…	$-\sqrt{2}$	…	0	…	$\sqrt{2}$	…
f'	+	0	−	╱	−	0	+
f	↗	$-2\sqrt{2}$	↘	╱	↘	$2\sqrt{2}$	↗

極大値　$-2\sqrt{2}$　$(x=-\sqrt{2})$

極小値　$2\sqrt{2}$　$(x=\sqrt{2})$ //

10

次の関数の極値を求めよ。

$-x \mid x$ 　0

(1) $f(x)=|x|(x+1)$

i) $x>0$ のとき

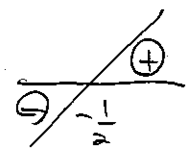
$f(x)=x(x+1)$

$=x^2+x$

$f'(x)=2x+1$

$f'(x)=0$ のとき

$x=-\dfrac{1}{2}$



ii) $x<0$ のとき

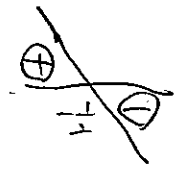
$f(x)=-x(x+1)$

$=-x^2-x$

$f'(x)=-2x-1$

$f'(x)=0$ のとき

$x=-\dfrac{1}{2}$



i), ii) より

x	…	$-\frac{1}{2}$	…	0	…
f'	+	0	−	╱	+
f	↗	$\frac{1}{4}$	↘	1	↗

極大値　$\dfrac{1}{4}$　$\left(x=-\dfrac{1}{2}\right)$

極小値　1　$(x=0)$ //

$-x \mid x$ 　0

(2) $f(x)=|x|\sqrt{x+2}$

i) $x>0$ のとき

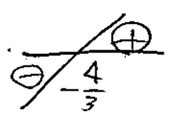
$f(x)=x\sqrt{x+2}$

$f'(x)=\sqrt{x+2}+\dfrac{x}{2\sqrt{x+2}}$

$=\dfrac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}$　$(x\neq -2)$

$f'(x)=0$ のとき

$x=-\dfrac{4}{3}$



ii) $x<0$ のとき

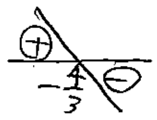
$f(x)=-x\sqrt{x+2}$

$f'(x)=-\sqrt{x+2}-\dfrac{x}{2\sqrt{x+2}}$

$=\dfrac{-3x-4}{2\sqrt{x+2}}$　$(x\neq -2)$

$f'(x)=0$ のとき

$x=-\dfrac{4}{3}$



i) ii) より

x	−2	…	$-\frac{4}{3}$	…	0	…
f'	╱	+	0	−	╱	+
f	0	↗	$\frac{4\sqrt{6}}{9}$	↘	0	↗

極大値　$\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$　$\left(x=-\dfrac{4}{3}\right)$

極小値　0　$(x=0)$ //

11

関数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$ が $x=1$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ。また，このとき，関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

$f'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}\quad(x\neq 0)$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
f'	$\pm$	0	$\mp$
f			

$f'(1)=0$

$f'(1)=1-a=0$

$a=1$ //

逆に

$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$

$f'(x)=0$ のとき

$x=\pm 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
f'	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
f	↗	-2	↘	/	↘	2	↗

極大値 $-2\quad(x=-1)$

極小値 $2\quad(x=1)$ //

12【関数の最大と最小】

次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $y=(1+\cos x)\sin x\quad(0\leqq x\leqq 2\pi)$

$f'(x)=(-\sin x)\sin x+(1+\cos x)\cos x$

$=-\sin^2 x+\cos x+\cos^2 x$

$=2\cos^2 x+\cos x-1$

$f'(x)=(2\cos x-1)(\cos x+1)$

$\frac{1}{3}\pi \quad \frac{5}{3}\pi$

$f'(x)=0$ のとき

$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$

$\cos x=-1,\ \dfrac{1}{2}$

$x=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
f'	/	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	/
f	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

∴ Max $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\quad\left(x=\dfrac{\pi}{3}\right)$

min $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\quad\left(x=\dfrac{5}{3}\pi\right)$ //

(2) $y=\dfrac{4-3x}{x^2+1}\quad(1\leqq x\leqq 4)$

$f'(x)=\dfrac{-3(x^2+1)-(4-3x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$-\frac{1}{3} \quad 3$

$f'(x)=0$ のとき

$-3x^2-3-8x+6x^2=0$

$3x^2-8x-3=0$

$(3x+1)(x-3)=0$

$x=-\dfrac{1}{3},\ 3$

x	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
f'	\	$-$		$+$	\
f	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$-\frac{8}{17}$

Max $\dfrac{1}{2}\quad(x=1)$

min $-\dfrac{1}{2}\quad(x=3)$ //

$f(4)=\dfrac{-8}{17}$

13【関数のグラフ】

次の関数の凹凸を調べよ。また，変曲点があればその座標を求めよ。

(1) $y=x^4+2x^3+1$

$f'(x)=4x^3+6x^2$

$f''(x)=12x^2+12x$

$f''(x)=0$ のとき

$x(x+1)=0$

$x=0,\ -1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cap$	0	$\cup$	1	$\cap$

変曲点

$(-1,0)\quad(0,1)$ //

(2) $y=xe^{-x}$

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$

$=e^{-x}(1-x)$

$f''(x)=-e^{-x}(1-x)-e^{-x}$

$=-e^{-x}(2-x)$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cup$	$\frac{2}{e^2}$	$\cap$

$f''(x)=0$ のとき

$x=2$

変曲点

$\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)$ //

(3) $y=x-\cos x\quad(0<x<\pi)$

$f'(x)=1+\sin x$

$f''(x)=\cos x$

$f''(x)=0$ のとき

$\cos x=\dfrac{1}{2}\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}\pi$	$\cdots$	π
f''	/	$+$	0	$-$	/
f	/	$\cap$	$\frac{1}{2}\pi$	$\cup$	/

変曲点

$\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ //

(4) $y=-x^4+4x^3-6x^2+4x$

$f'(x)=-4x^3+12x^2-12x+4$

$f''(x)=-12x^2+24x-12$

$f''(x)=0$ のとき

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$ (重解)

x	$\cdots$	1	$\cdots$
f''	$-$	0	$-$
f	↘		↘

∴ 変曲点 なし //

14

関数 $y=e^{-2x^2}$ の増減，グラフの凹凸，漸近線を調べて，グラフの概形をかけ。

$f'(x)=(-2x^2)'e^{-2x^2}$

$=-4xe^{-2x^2}$

$f'(x)=0$ のとき

$x=0$

x	…	$-\frac{1}{2}$	…	0	…	$\frac{1}{2}$	…
f'	+	+	+	0	−	−	−
f''	+	0	−	−	−	0	+
f	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

$f''(x)=-4e^{-2x^2}-4x(-2x^2)'e^{-2x^2}$

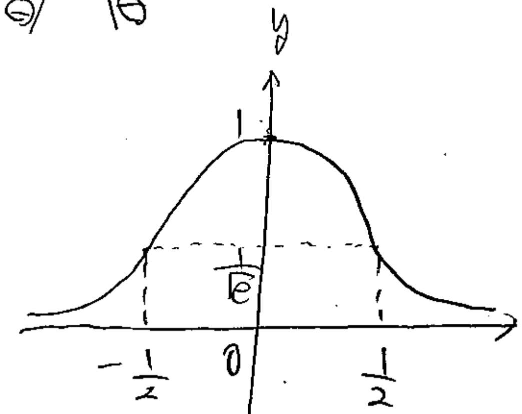
$=-4e^{-2x^2}+16x^2e^{-2x^2}$

$=-4e^{-2x^2}(1-4x^2)$

$f''(x)=0$ のとき　⊖ ⊕ ⊖

$4x^2-1=0$

$x=\pm\frac{1}{2}$



15

関数 $y=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$ のグラフの概形をかけ。

$f(x)=\dfrac{4}{x+1}+x-2 \quad (x\neq-1)$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -2 & \\ \hline 1 & 1 & -1 & 2 \\ & 1 & 1 & \\ \hline & & -2 & 2 \\ & & -2 & -2 \\ \hline & & & 4 \end{array}$$

漸近線

$\begin{cases} x=-1 \\ y=x-2 \end{cases}$　⊕ ⊖ ⊕

$f'(x)=\dfrac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x+2)}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

x	…	-3	…	-1	…	1	…
f'	+	0	−	／	−	0	+
f''	−	−	−	／	+	+	+
f	↗	-7	↘	／	↘	1	↗

$f'(x)=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$x=-3,\ 1$

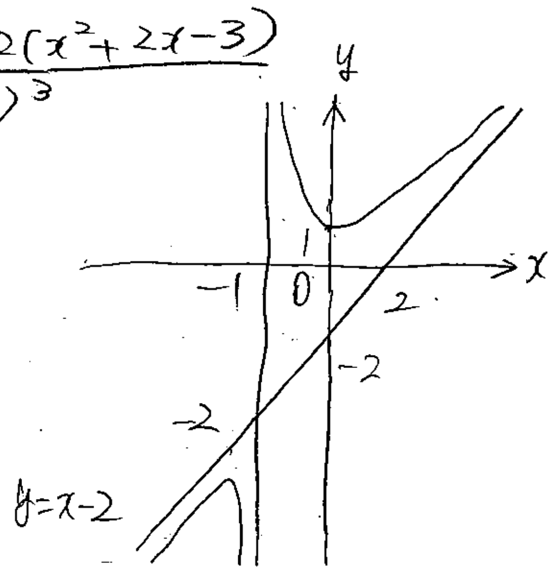
$f''(x)=\dfrac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x-3)\,2(x+1)}{(x+1)^4}$

$=\dfrac{2(x^2+2x+1)-2(x^2+2x-3)}{(x+1)^3}$

$=\dfrac{8}{(x+1)^3}$

$f(-3)=-2-3-2=-7$

$f(1)=1$



16

次の関数の極値を，第２次導関数を利用して求めよ。

(1)　$f(x)=x^4-6x^2+5$

$f'(x)=4x^3-12x$

$f'(x)=0$ のとき

$x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$x=-\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}$

$f(\pm\sqrt{3})=9-18+5=-4$

$f(0)=5$

$f''(x)=12x^2-12$

$f''(-\sqrt{3})>0$

$f''(0)<0$

$f''(\sqrt{3})>0$

∴ 極大値　5　$(x=0)$

極小値　-4　$(x=\pm\sqrt{3})$

(2)　$f(x)=x+2\sin x \quad (0\leqq x\leqq 2\pi)$

$f'(x)=1+2\cos x$

$f'(x)=0$ のとき

$\cos x=-\frac{1}{2}$

$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

$f''(x)=-2\sin x$

$f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{4}{3}\pi+2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$f''\left(\frac{2}{3}\pi\right)<0$

$=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

$f''\left(\frac{4}{3}\pi\right)>0$　∴ 極大値　$\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$　$\left(x=\frac{2}{3}\pi\right)$

極小値　$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$　$\left(x=\frac{4}{3}\pi\right)$

17【不等式の証明】

$x>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

(1)　$\log(x+1)<x$

$f(x)=x-\log(x+1)$　　$f(x)$ は単調増加なので

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}$　　$\min=f(0)=0$

$=\dfrac{x}{x+1}>0$　　よって

$\log(x+1)<x$

(2)　$e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2$

$f(x)=e^x-1+x+\frac{1}{2}x^2$　　$f(x)$ は単調増加

$f'(x)=e^x+1-x$　　$\min=f(0)=0$

$f''(x)=e^x-1>0$ より　　よって

$f'(x)$ は単調増加

$f'(0)=2>0$ より　　$e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2$

18【方程式の実数解の個数】

a は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1) $\frac{x^3}{x-1}=a$

$f(x)=\frac{x^3}{x-1}\quad(x\neq 1)$

$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}$

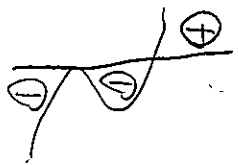
$=\frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}$

$=\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0$ のとき

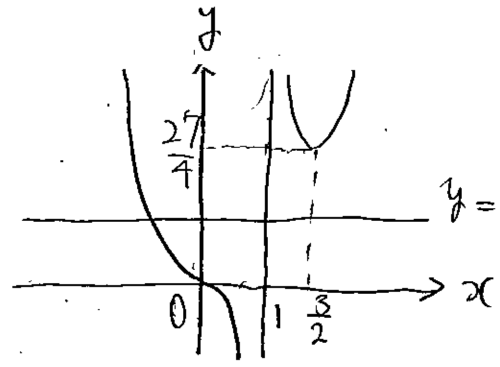
$x^2(2x-3)=0$

$x=0$ (重解), $\frac{3}{2}$



x	…	0	…	1	…	$\frac{3}{2}$	
f'	−	0	−		−	0	+
f	↘	0	↘		↘	$\frac{27}{4}$	↗

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\frac{27}{8}}{\frac{3}{2}-1}=\frac{27}{8}\times\frac{2}{1}=\frac{27}{4}$



$a<\frac{27}{4}$ のとき 1コ

$a=\frac{27}{4}$ のとき 2コ

$a>\frac{27}{4}$ のとき 3コ

(2) $xe^x-a=0$

$f(x)=xe^x$

$f'(x)=e^x+xe^x$

$f'(x)=0$ のとき

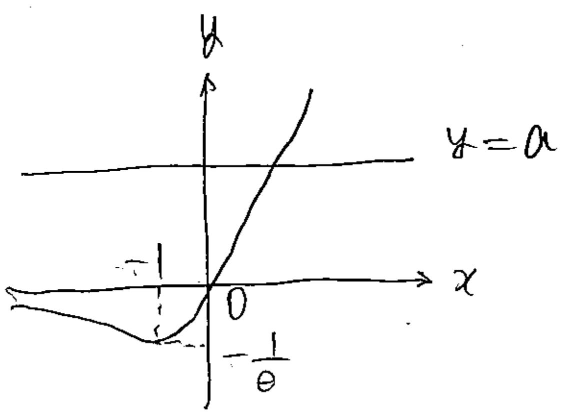
$e^x(1+x)=0$

$x=-1$

x	…	−1	…
f'	−	0	+
f	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$



$a<-\frac{1}{e}$ のとき 0コ

$a=-\frac{1}{e}$ のとき 1コ

$-\frac{1}{e}<a<0$ のとき 2コ

$0\leqq a$ のとき 1コ

19【速度と加速度】

地上から，初速度 v_0 m/s でボールを真上に打ち上げるとき，t 秒後の高さ x m は，$x=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ で与えられている。ただし，g は定数とする。t 秒後におけるボールの速度 v m/s と加速度 α m/s^2 を求めよ。

$v=\frac{dx}{dt}=v_0-gt$ (m/s)

$\alpha=\frac{dv}{dt}=-g$ (m/s^2)

20

時刻 t における点 P の座標 $(x,\ y)$ が次の式で与えられるとき，$t=3$ における P の速さ，加速度の大きさを求めよ。 $\vec{v}$ $\vec{\alpha}$

(1) $x=2t+1$, $y=t^2-4t$

$\frac{dx}{dt}=2$ $\quad\frac{d^2x}{dt^2}=0$

$\frac{dy}{dt}=2t-4$ $\quad\frac{d^2y}{dt^2}=2$

$t=3$ のとき

$\vec{v}=(2,2)$

$|\vec{v}|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

$\vec{\alpha}=(0,2)$

$|\vec{\alpha}|=\sqrt{4}=2$

(2) $x=2\cos\pi t$, $y=2\sin\pi t$

$\frac{dx}{dt}=-2\pi\sin\pi t$ $\quad\frac{d^2x}{dt^2}=-2\pi^2\cos\pi t$

$\frac{dy}{dt}=2\pi\cos\pi t$ $\quad\frac{d^2y}{dt^2}=-2\pi\sin\pi t$

$t=3$ のとき

$\vec{v}=(0,-2\pi)$

$|\vec{v}|=\sqrt{0+4\pi^2}=2\pi$

$t=3$ のとき

$\vec{\alpha}=(2\pi^2,0)$

$|\vec{\alpha}|=2\pi^2$

21【近似式】

$h\fallingdotseq 0$ のとき，次の関数の値について，1 次の近似式を作れ。

(1) $\cos(a+h)$

$\cos(a+h)\fallingdotseq\cos a-h\sin a$

(2) $\tan(a+h)$

$\tan(a+h)\fallingdotseq\tan a+\frac{h}{\cos^2 a}$

22

$x\fallingdotseq 0$ のとき，次の関数について，1 次の近似式を作れ。

(1) e^x

$e^x\fallingdotseq 1+x$

(2) $\log(1+x)$

$\log(1+x)\fallingdotseq x$

(3) $\frac{1}{1+x}$

$\frac{1}{1+x}\fallingdotseq 1-x$

23

1 次の近似式を用いて，次の値の近似値を求めよ。

(1) $\sqrt[4]{1.03}$

$=(1+0.03)^{\frac{1}{4}}$

$\fallingdotseq 1+\frac{1}{4}\cdot 0.03$

$=1.0075$

(2) $\log 1.01$

$=\log(1+0.01)$

$\fallingdotseq 0.01$

(3) $\frac{1}{0.998}$

$=\frac{1}{1+(-0.002)}\fallingdotseq 1+0.002$

$=1.002$