1【微分係数】

関数 $f(x)=\sqrt{x}$ について，$x=2$ における微分係数を定義に従って求めよ。

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$ //

2【接線の傾き】

関数 $f(x)=\sqrt{x}$ のグラフの点 $(3,\ \sqrt{3})$ における接線の傾きを求めよ。

$$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\therefore\ f'(3)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ //

3【微分可能と連続】

関数 $f(x)=|x^2-1|$ は $x=1$ で微分可能でないことを示せ。

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to +0}\frac{|(1+h)^2-1|-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to +0}\frac{|2h+h^2|}{h}$$

$$=\lim_{h\to +0}\frac{|h||h+2|}{h}$$

$(h\to+0\quad |h|=h)$

$$=\lim_{h\to +0}|h+2|$$

$$=2$$

$$\lim_{h\to -0}\frac{|h||h+2|}{h}$$

$(h\to-0\quad |h|=-h)$

$$=\lim_{h\to -0}\frac{-h|h+2|}{h}$$

$$=\lim_{h\to -0}-|h+2|$$

$$=-2$$

$\therefore\ x=1$ で微分可能でない //

4【導関数の定義】

次の関数の導関数を，定義に従って求めよ。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2(x+h)}-\frac{1}{2x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\cdot\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2x(x+h)}=-\frac{1}{2x^2}$$ //

(2) $f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$ //

5【導関数】

次の関数を微分せよ。

(1) $y=(x+1)(x^3-4x)$

$$y'=(x^3-4x)+(x+1)(3x^2-4)$$

$$=x^3-4x+3x^3-4x+3x^2-4$$

$$=4x^3+3x^2-8x-4$$ //

(2) $y=(3x^2-2)(x^2+x+1)$

$$y'=6x(x^2+x+1)+(3x^2-2)(2x+1)$$

$$=6x^3+6x^2+6x+6x^3+3x^2-4x-2$$

$$=12x^3+9x^2+2x-2$$ //

6

(1) $y=(x+2)(x-1)(x-5)$

$$y'=(x-1)(x-5)+(x+2)(x-5)+(x+2)(x-1)$$

$$=x^2-6x+5+x^2-3x-10+x^2+x-2$$

$$=3x^2-8x-7$$ //

(2) $y=(x^2-1)(x+2)(2x-1)$

$$y'=2x(x+2)(2x-1)+(x^2-1)(2x-1)+(x^2-1)(x+2)\cdot 2$$

$$=2x(2x^2+3x-2)+(2x^3-x^2-2x+1)$$

$$+2(x^3+2x^2-x-2)$$

$$=8x^3+9x^2-8x-3$$ //

7

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\frac{1}{2x-3}$

$$y'=-\frac{(2x-3)'}{(2x-3)^2}$$

$$=-\frac{2}{(2x-3)^2}$$ //

(2) $y=\frac{x^2}{x+3}$

$$y'=\frac{2x(x+3)-x^2\cdot 1}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{2x^2+6x-x^2}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}$$ //

(3) $y=\frac{2x-1}{x^2+1}$

$$y'=\frac{2(x^2+1)-(2x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2-4x^2+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$$ //

8

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$

$$y'=-x^{-2}$$

$$=-\frac{1}{x^2}$$ //

(2) $y=-\frac{4}{x^2}=-4x^{-2}$

$$y'=8x^{-3}$$

$$=\frac{8}{x^3}$$ //

(3) $y=\frac{1}{3x^3}=\frac{1}{3}x^{-3}$

$$y'=-x^{-4}$$

$$=-\frac{1}{x^4}$$ //

9

次の関数を微分せよ。

(1) $y=(3x+1)^4$

$$y'=4\cdot 3(3x+1)^3$$

$$=12(3x+1)^3$$ //

(2) $y=\frac{1}{(4x+3)^2}=(4x+3)^{-2}$

$$y'=-2\cdot 4(4x+3)^{-3}$$

$$=\frac{-8}{(4x+3)^3}$$ //

10

次の関数を微分せよ。

(1) $y=(2x^2+5)^4$

$$y'=(2x^2+5)'4(2x^2+5)^3$$

$$=16x(2x^2+5)^3$$ //

(2) $y=(1-2x^2)^3$

$$y'=(1-2x^2)'(1-2x^2)^3$$

$$=-4x\cdot 3(1-2x^2)^2$$

$$=-12x(1-2x^2)^2$$ //

(3) $y=\frac{1}{(x^2+1)^3}=(x^2+1)^{-3}$

$$y'=(x^2+1)'-3(x^2+1)^{-4}$$

$$=\frac{-6x}{(x^2+1)^4}$$ //

11

逆関数の微分法を用いて，次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt[6]{x}$

$$x=y^6$$

$$\frac{dx}{dy}=6y^5$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{6y^5}$$

$$=\frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$$ //

(2) $y=\sqrt[3]{x}\quad(x>0)$

$$x=y^3$$

$$\frac{dx}{dy}=3y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

12

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

$$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(2) $y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$

$$y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

(3) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$

$$y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$ //

13

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}=(x+1)^{\frac{2}{3}}$

$$y'=\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$$ //

(2) $y=\sqrt{4-x^2}=(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$y'=\frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}(4-x^2)'$$

$$=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$ //

14

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\cos 2x$

$$y'=2\cdot -\sin 2x$$

$$=-2\sin 2x$$ //

(2) $y=\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$y'=3\sqrt{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$$ //

(3) $y=\sin^2 x$

$$y'=(\sin x)'\,2\cos x$$

$$=2\sin x\cos x$$ //

(4) $y=\tan^2 x$

$$y'=(\tan x)'\,2\tan x$$

$$=\frac{2\tan x}{\cos^2 x}$$ //

(5) $y=\frac{1}{\sin x}$

$$y'=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$ //

(6) $y=\cos^2 3x$

$$y'=2(\cos 3x)'\cos 3x$$

$$=-6\sin 3x\cos 3x$$ //

15

次の関数を微分せよ。

(1) $y=x\sin x+\cos x$

$y'=\sin x+x\cos x-\sin x$

$=x\cos x$

(2) $y=x\cos x-\sin x$

$y'=\cos x-x\sin x-\cos x$

$=-x\sin x$

16

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log 3x$

$y'=\frac{(3x)'}{3x}=\frac{1}{x}$

(2) $y=\log_2(4x-1)$

$y'=\frac{4}{(4x-1)\log 2}$

(3) $y=\log(x^2+1)$

$y'=\frac{2x}{x^2+1}$

(4) $y=x\log x-x$

$y'=\log x+1-1$

$=\log x$

17

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log|3x+2|$

$y'=\frac{3}{3x+2}$

(2) $y=\log|\sin x|$

$y'=\frac{\cos x}{\sin x}$

(3) $y=\log_2|x^2-4|$

$y'=\frac{2x}{(x^2-4)\log 2}$

18

$\log|y|$ の導関数を利用して，次の関数を微分せよ。

(1) $y=x^2\cdot\sqrt[3]{x+1}$

$\log|y|=2\log|x|+\frac{1}{3}\log|x+1|$

両辺を微分

$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}+\frac{1}{3(x+1)}$

$=\frac{6(x+1)+x}{3x(x+1)}$

$=\frac{7x+6}{3x(x+1)}$

$y'=\frac{7x+6}{3x(x+1)}x^2\sqrt[3]{x+1}$

$=\frac{x(7x+6)}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

(2) $y=\frac{(x+2)(x+3)^3}{x^2+1}$

$\log|y|=\log|x+2|+3\log|x+3|-\log|x^2+1|$

両辺を微分

$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+3}-\frac{2x}{x^2+1}$

$=\frac{(x+3)(x^2+1)+3(x+2)(x^2+1)-2x(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x^2+1)}$

$=\frac{x^3+x+3x^2+3+3x^3+3x+6x^2+6-2x^3-10x^2-12x}{(x+2)(x+3)(x^2+1)}$

$=\frac{2x^3-x^2-8x+9}{(x+2)(x+3)(x^2+1)}$

$y'=\frac{2x^3-x^2-8x+9}{(x+2)(x+3)(x^2+1)}\cdot\frac{(x+2)(x+3)^3}{x^2+1}$

$=\frac{(x+3)^2(2x^3-x^2-8x+9)}{(x^2+1)^2}$

(3) $y=x^{\sin x}$ $(x>0)$

$\log y=\sin x\log x$

両辺微分

$\frac{y'}{y}=\cos x\log x+\frac{\sin x}{x}$

$y'=\left(\cos x\log x+\frac{\sin x}{x}\right)x^{\sin x}$

19

次の関数を微分せよ。ただし，(6) の a は1でない正の定数とする。

(1) $y=e^{2x}$

$y'=2e^{2x}$

(2) $y=e^{-x^2}$

$y'=(-x^2)'e^{-x^2}$

$=-2xe^{-x^2}$

(3) $y=3^x$

$y'=3^x\log 3$

(4) $y=2^{-3x}$

$y'=(-3x)'2^{-3x}\log 2$

$=-3\cdot 2^{-3x}\log 2$

(5) $y=xe^x$

$y'=e^x+xe^x$

$=e^x(1+x)$

(6) $y=(2x-1)a^x$

$y'=2a^x+(2x-1)a^x\log a$

$=a^x(2+(2x-1)\log a)$

20

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{1+\cos x}$

$$y'=-\frac{(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$$
$$=\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

(2) $y=(\log x)^2$

$$y'=(\log x)'\,2\log x$$
$$=\frac{2\log x}{x}$$

(3) $y=\log\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$

$$=\log|x+1|-\log|x+2|$$
$$y'=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

(4) $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

$$y'=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{1}{(e^x+1)^2}$$

(5) $y=\sin^2 x\cos 2x$

$$y'=(\sin x)'\,2\sin x\cos 2x+2\sin^2 x(-\sin 2x)$$
$$=2\sin x\cos x\cos 2x-2\sin^2 x\sin 2x$$
$$=2\sin 2x\cos 2x-2\sin^2 x\sin 2x$$
$$=\sin 2x(\cos 2x-2\sin^2 x)$$
$$=\sin 2x(1-2\sin^2 x-2\sin^2 x)$$
$$=\sin 2x(1-4\sin^2 x)$$

21 【第 n 次導関数】

次の関数について，第3次までの導関数を求めよ。ただし，(1)の a は0でない定数とする。

(1) $y=ax^3$

$y'=3ax^2$

$y''=6ax$

$y'''=6a$

(2) $y=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$

$y'=-x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$

$y''=2x^{-3}=\dfrac{2}{x^3}$

$y'''=-6x^{-4}=\dfrac{-6}{x^4}$

(3) $y=\cos x$

$y'=-\sin x$

$y''=-\cos x$

$y'''=\sin x$

(4) $y=\log x$

$y'=\dfrac{1}{x}$

$y''=-\dfrac{1}{x^2}$

$y'''=\dfrac{2}{x^3}$

(5) $y=e^x$

$y'=e^x$

$y''=e^x$

$y'''=e^x$

(6) $y=e^{-2x}$

$y'=-2e^{-2x}$

$y''=4e^{-2x}$

$y'''=-8e^{-2x}$

22

次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

(1) $y=x^n$ （n は正の整数）

$y'=nx^{n-1}$

$y''=n(n-1)x^{n-2}$

$y'''=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$y^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots 1$

$\therefore y^{(n)}=n!$

(2) $y=e^{2x}$

$y'=2e^{2x}$

$y''=2^2e^{2x}$

$y'''=2^3e^{2x}$

$\therefore y^{(n)}=2^{(n)}e^{2x}$

23 【曲線の方程式と導関数】

次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $x^2+y^2=1$

両辺を x で微分

$$2x+\frac{dy}{dx}2y=0$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

(2) $x^2-y^2=1$

両辺を x で微分

$$2x-\frac{dy}{dx}2y=1$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$$

24

x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1) $x=2t^2$，$y=2t-1$

$$\frac{dx}{dt}=4t,\quad \frac{dy}{dt}=2$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2}{4t}=\frac{1}{2t}$$

(2) $x=\cos t$，$y=\sin t$

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=\cos t$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{\cos t}{\sin t}$$

25

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ であることを用いて，次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^2$$
$$=e^2$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

$2n=t$ とおく

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{2}}=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{e}$$

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

$n=2t$ とおく

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=e^2$$