積分法①

$\boxed{1}$ **【不定積分】**

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}dx$

(3) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$

$\boxed{2}$

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{x+2}{\sqrt{x}}dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{y}-1)^2}{y}dy$　　(4) $\displaystyle\int\left(3t^2-\frac{1}{t}\right)^2dt$

$\boxed{3}$

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(\cos x-2\sin x)dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{2\cos^3 x-1}{\cos^2 x}dx$

(3) $\displaystyle\int 5^x dx$　　(4) $\displaystyle\int(3^x-2e^x)dx$

(5) $\displaystyle\int\frac{dx}{\tan^2 x}dx$

$\boxed{4}$

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(3x+1)^4dx$　　(2) $\displaystyle\int(4x-3)^{-3}dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$　　(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{2x+1}$

(5) $\displaystyle\int\sin 2x\,dx$　　(6) $\displaystyle\int e^{3x-1}dx$

$\boxed{5}$ **【置換積分法】**

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x(1-x)^4dx$

(2) $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

$\boxed{6}$

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$

$\boxed{7}$ **【$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$の不定積分】**

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x}$

$\boxed{8}$ **【部分積分法】**

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$

(2) $\displaystyle\int xe^{-x}dx$

$\boxed{9}$

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \log 2x\,dx$

(2) $\displaystyle\int \log x^2\,dx$

(3) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

$\boxed{10}$

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x+2}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{4x^2}{2x-1}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+x-2}dx$

$\boxed{11}$

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \cos^2 x\,dx$

(2) $\int \sin^2 3x\,dx$

(3) $\int \sin x \cos x\,dx$

(4) $\int \cos 3x \cos 2x\,dx$

(5) $\int \sin x \sin 3x\,dx$

(6) $\int \sin 3x \cos 2x\,dx$

$\boxed{12}$ **【定積分】**

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$　　(2) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta$　　(4) $\int_0^1 e^x dx$

(5) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$　　(6) $\int_{-1}^1 2^x dx$

$\boxed{13}$

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx$　　(2) $\int_0^1 (2x+1)^3 dx$

(3) $\int_{-1}^1 (e^t - e^{-t})dt$　　(4) $\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx$

(5) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$　　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta\,d\theta$

$\boxed{14}$ **【絶対値のついた定積分】**

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^4 |\sqrt{x}-1|\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 |e^x-1|\,dx$

$\boxed{15}$ **【置換積分】**

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^5\,dx$

(2) $\displaystyle\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

$\boxed{16}$ **【$\sqrt{a^2-x^2}$，$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ の定積分】**

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$\boxed{17}$ **【$\dfrac{1}{x^2+a^2}$ の定積分】**

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4}$

$\boxed{18}$ **【偶関数，奇関数】**

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^3+3x^2+4x+5)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (e^x-e^{-x})dx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

$\boxed{19}$ **【部分積分】**

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$

$\boxed{20}$

部分積分法によって，定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x+1)^3(x-1)dx$ を求めよ。

$\boxed{21}$

定積分 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$ を求めよ。

$\boxed{22}$

n は 0 または正の整数とする。定積分 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ について，次の問いに答えよ。

ただし，$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$ である。

(1) I_0，I_1 を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，$\sin^n x=\sin^{n-1}x\sin x=\sin^{n-1}x(-\cos x)'$ である。
I_n に部分積分法を適して，次のことを示せ。
$n \geqq 2$ のとき　$I_n=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$

(3) $n \geqq 2$ のとき，次のことを示せ。

n が偶数のとき　$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

n が奇数のとき　$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$

$\boxed{23}$ **【定積分と導関数】**

次の関数を x で微分せよ。ただし，(2) では $x>0$ とする。

(1) $\int_0^x \sin t\,dt$　　(2) $\int_1^x t\log t\,dt$

$\boxed{24}$

関数 $G(x)=\int_0^x (x-t)e^t dt$ について，$G'(x)$ および $G''(x)$ を求めよ。

$\boxed{25}$

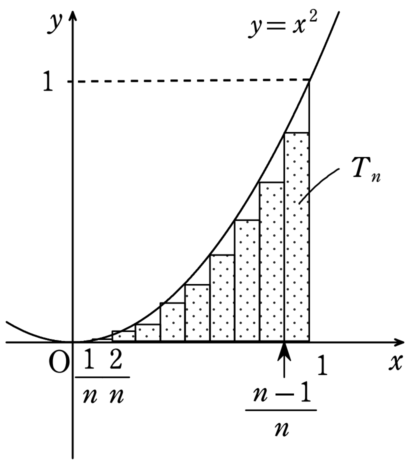
関数 $\int_x^{3x} t\cos t\,dt$ を x で微分せよ。

$\boxed{26}$

等式 $f(x)=x+\int_0^1 f(t)e^t dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{27}$ **【区分求積法】**

右図のように区間 $[0,\ 1]$ を n 等分して n 個の長方形を作り，それらの面積の和を S_n とする。
長方形の面積の和を T_n とするとき，$\lim_{n\to\infty} T_n = S$
となることを示せ。



$\boxed{28}$

次の極限値を求めよ。

(1)　$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4)$

(2)　$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

$\boxed{29}$ **【定積分と不等式】**

次のことを示せ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき　　$\frac{1}{x+1} \geqq \frac{1}{x^2+x+1}$

(2)　$\log 2 > \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$

$\boxed{30}$

関数 $f(x)=\frac{1}{x}$ の定積分を利用して，次の不等式を証明せよ。

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n} > \log(n+1)$　　ただし，n は自然数

$\boxed{31}$

次の 2 直線，および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=\frac{1}{x}$，$x=1$，$x=e$

(2)　$y=\sqrt{x+1}$，$x=0$，$x=3$

$\boxed{32}$

曲線 $y=e^x-e$ と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

$\boxed{33}$

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2$，$y=\sqrt{x}$

(2)　$x+4y=5$，$xy=1$

$\boxed{34}$

次の曲線と直線で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

(1)　$x=y^2+1$，x 軸，y 軸，$y=2$

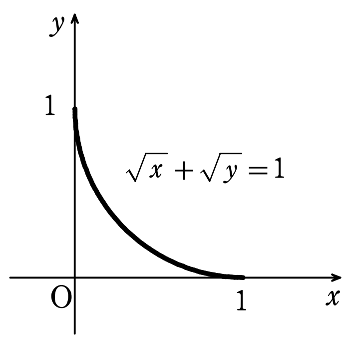
(2)　$x=y^2-1$，$x=y+5$

$\boxed{35}$

曲線 $4x^2+2y^2=1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$\boxed{36}$

曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ は右の図のようになる。
この曲線と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積Sを求めよ。



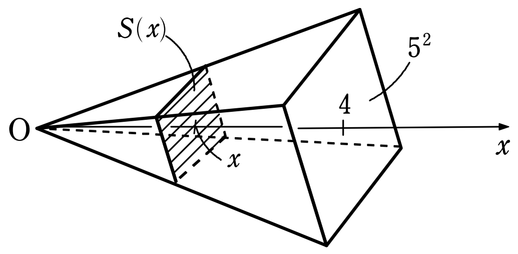
$\boxed{37}$ 【媒介変数表示の曲線と面積】

次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$x=3\cos\theta$，$y=2\sin\theta$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

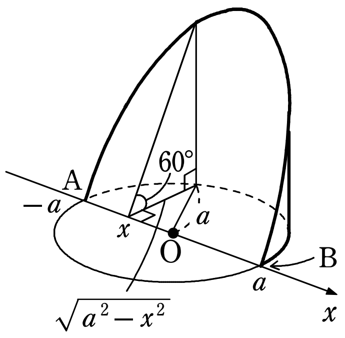
$\boxed{38}$ **【角錐の体積と定積分】**

四角錐の頂点を原点 O とし，頂点から底面に下ろした垂線を x 軸にとる。
$0 \leqq x \leqq 4$ として，x 軸上で座標が x である点を通り，x 軸に垂直な平面でこの立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とする。
1 辺の長さが 5 の正方形を底面とする高さ 4 の四角錐の体積 V を求めよ。



$\boxed{39}$ **【断面積 $S(x)$ と立体の体積 V】**

右図のように，底面の半径 a の直円柱を，底面の直径を含み底面と 60° の角をなす平面で切断する。
底面の直径 AB を x 軸に，中心を原点 O にとる。座標が $x\,(-a \leqq x \leqq a)$ である点を通り，x 軸に垂直な平面で題意の立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とする。
このとき，底面とこの平面で挟まれた部分の体積 V を求めよ。



$\boxed{40}$

$a>0$，$b>0$ とする。楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた図形が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{41}$ **【y 軸の周りの回転体の体積】**

次の曲線と直線で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(1) $y=4-x^2$，$y=1$

(2) $y=1-\sqrt{x}$，x 軸

$\boxed{42}$ **【円環体】**

放物線 $y=4x-x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{43}$ **【媒介変数表示された曲線と回転体の体積】**

アステロイド $x=\cos^3\theta$，$y=\sin^3\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ で囲まれた図形が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{44}$ **【速度と位置】**

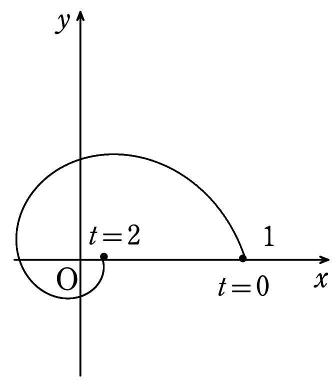
数直線上を運動する点 P の速度が，時刻 t の関数として $v=4-2t$ で与えられている。
$t=0$ における P の座標が 2 であるとき，$t=3$ のときの P の座標を求めよ。

$\boxed{45}$ **【数直線上の運動と道のり】**

数直線上を運動する点 P があり，時刻 t における P の速さは $v=\sin 2t$ であるとする。$t=0$ から $t=\pi$ までに P が通過する道のり s を求めよ。

$\boxed{46}$ **【座標平面上の運動と道のり】**

座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が
$x=e^{-t}\cos\pi t$，$y=e^{-t}\sin\pi t$ で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までに P が通過する道のり s を求めよ。



$\boxed{47}$ **【サイクロイドの長さ】**

曲線 $x=2(t-\sin t)$，$y=2(1-\cos t)$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ の長さ L を求めよ。

$\boxed{48}$ **【曲線の長さ】**

曲線 $y=x\sqrt{x}$ $(0\leqq x\leqq 5)$ の長さ L を求めよ。