極限①（公式）

$\{a_n\}$ の極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underbrace{\alpha}_{極限値}$$

- 収束 → 極限値あり（極限あり）
- 発散
  - ∞（極限あり）
  - $-\infty$（極限あり）
  - 振動（極限なし）

例

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}2n^2=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}(-2n^2)=-\infty \qquad \lim_{n\to\infty}(-1)^n=\text{振動}$$

無理式の $\{a_n\}$ の極限

不定形

$\infty-\infty$，$\dfrac{\infty}{\infty}$ $\Longrightarrow$ 式変形

注　$\infty+\infty$，$\infty\times\infty$ は不定形でない

無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限

$$\lim_{n\to\infty} r^n=\begin{cases}\infty & (r>1)\\ 1 & (r=1)\\ 0 & (-1<r<1)\\ \text{振動} & (r\leqq -1)\end{cases}$$

無限等比数列 $\{r^n\}$ の収束条件

$$\begin{cases}\text{初項}\ a=0\\ -1<r\leqq 1\end{cases}$$

例

$$\lim_{n\to\infty}3^n=\infty，\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

無限級数

無限数列　……　数列を無限に並べたもの

無限級数　……　無限数列を足したもの

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad \underbrace{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}_{部分和\ S_n}+\cdots\cdots$$

無限級数の収束と発散

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束 $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ は収束

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散 $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ は発散

無限級数の和（極限値）

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=S$ に収束 $\Longleftrightarrow$ 無限級数は収束して和は S

例

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ の収束，発散を調べ，収束するときは和を求めよ。

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}3$$

無限等比級数

無限等比数列　……　等比数列を無限に並べたもの

無限等比級数　……　無限等比数列を足したもの

無限級数

無限等比級数

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^n+\cdots\cdots$$

無限等比級数の収束と発散

$\{ar^{n-1}\}$ の収束 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases}a=0\\ -1<r<1\end{cases}$

$\{ar^{n-1}\}$ の発散 $\Longleftrightarrow$ $r\leqq -1$，$1\leqq r$

無限等比級数の和

① $a=0$ $\Longrightarrow$ 0

② $-1<r<1$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{a}{1-r}$

例

$$1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\cdots\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{7}}=\frac{7}{6}$$

極限②（公式）

無限級数と無限等比級数の収束条件と和

級数の種類		収束条件	和
無限級数	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} S_n$	S
無限等比級数	$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$	$a=0$	0
		$-1<r<1$	$\dfrac{a}{1-r}$

注　無限等比数列の収束条件　　$-1<r\leqq 1$

無限級数の収束と発散

① $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束　$\Longrightarrow$　$\lim_{n\to\infty} a_n=0$

② $\lim_{n\to\infty} a_n \fallingdotseq 0$　$\Longrightarrow$　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散　(② は ① の対偶)

例

次の無限数列は発散することを示せ。

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{6}+\frac{5}{9}+\frac{7}{12}+\cdots\cdots+\frac{2n-1}{3n}+\cdots\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3}=\frac{2}{3}$$

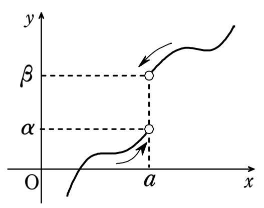
よって　発散する

片側極限

$\lim_{x\to a-0} f(x)=\alpha$　(左側極限)，　$\lim_{x\to a+0} f(x)=\beta$　(右側極限)

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$　$\Longleftrightarrow$　$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha$

例



$\lim_{x\to a-0} f(x) \fallingdotseq \lim_{x\to a+0} f(x)$

$\lim_{x\to a} f(x)$ は存在しない

三角関数の極限

① $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，　$\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

② $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$，　$\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$

③ $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，　$\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=2$

e の極限

① $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

② $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

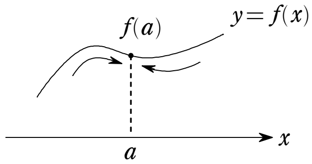
③ $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1$

④ $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

関数の連続性

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$　$\Longleftrightarrow$　$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha$

$f(x)$ が $x=a$ で連続　$\Longleftrightarrow$　$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ が存在



開区間，閉区間

$a<x\leqq b$　$\Longrightarrow$　$(x,\ b]$

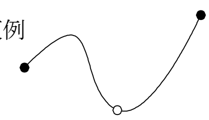
$x\leqq b$　$\Longrightarrow$　$(-\infty,\ b]$

【開区間，閉区間を使うメリット】

① 視覚的にわかりやすい

② どこで連続かわかる (閉区間で連続なら Max，min が存在する)

反例



ガウス記号

① $x-1<[x]\leqq x$　の利用

② $[x]\leqq x<[x]+1$　の利用

③ $[x]=m$　(m：整数)　とおく

例

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}$$

$$3x-1<[3x]\leqq 3x$$

$$\frac{3x-1}{x}<\frac{[3x]}{x}\leqq 3$$

(左辺)$=\dfrac{3x-1}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{} 3$

はさみうちの原理より　$\lim_{x\to\infty}\dfrac{[3x]}{x}=3$