第4章　極限

$\{a_n\}$の極限

$\{a_n\}$の極限

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

極限値

収束	→ 極限値あり	極限あり
発散	∞	極限あり
	$-\infty$	極限あり
	振動	極限なし

$\boxed{1}$

ex

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} 2n^2 = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} (-2n^2) = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \text{振動}$$

無理式の$\{a_n\}$の極限

不定形

$$\boxed{\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}}$$

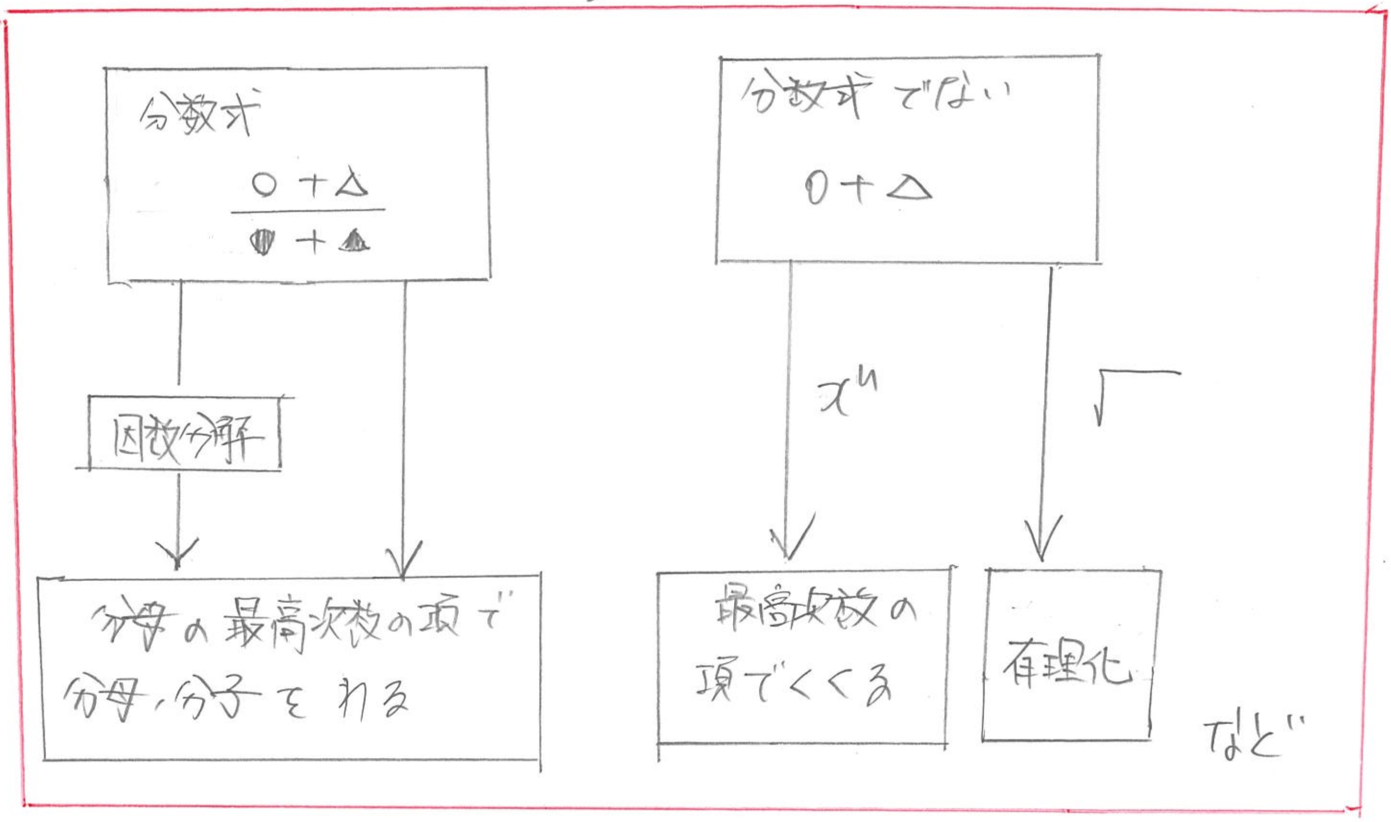
注 不定形でない

$\infty + \infty$, $\infty \times \infty$

↓

式変形

不定形の式変形のパターン



ex

$\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}=0$$

Q. なぜ分母の最高次数でわるか

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2}=\infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^3}=0$$

次数 大 $\ggg$ 次数 小

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{2n^2+3}\fallingdotseq\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

はさみうちの原理

① sin、ガウス
② 真ん中が求めにくく、両辺が同じ値に収束しそう。

ex　$\boxed{5}$

極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}$ を求めよ。

(解答)

$$-1 \leqq \sin n\pi \leqq 1$$

$$-1 \leqq \sin\frac{n\pi}{3} \leqq 1$$

$$\underline{-\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3} \leqq \underline{\frac{1}{n}}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3} = \underline{0}$$

$\{r^n\}$ の極限

無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & (r>1) \\ 1 & (r=1) \\ 0 & (-1<r<1) \\ \text{振動} & (r \leqq -1) \end{cases}$$

$\boxed{6}$

無限等比数列の収束条件

$$\begin{cases} \text{初項 } a=0 \\ -1<r\leqq 1 \end{cases}$$

ex

$$\lim_{n\to\infty} 3^n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$\boxed{7} \sim \boxed{10}$

無限級数

無限数列 … 数列を無限に並べたもの

無限級数 … 無限数列を足したもの

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{\text{部分和 } S_n} + \cdots$

無限数列の収束と発散

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束 $\iff$ $\lim_{n\to\infty} S_n$ は収束

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散 $\iff$ $\lim_{n\to\infty} S_n$ は発散

無限級数の和 極限値

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ に収束 $\iff$ 無限級数は収束して和は S

ex. $\sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ の収束・発散を調べ、収束するときは和を求めよ。

(解答)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$

$\boxed{11}$

$$= 3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$$

無限等比級数

無限等比数列 …等比数列を無限に並べたもの

無限等比級数 …無限等比数列を足したもの

無限級数

無限等比級数

$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots$

無限等比級数の収束と発散

$\{ar^{n-1}\}$ の収束 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} a = 0 \\ -1 < r < 1 \end{cases}$

$\{ar^{n-1}\}$ の発散 $\Longleftrightarrow$ $r \leqq -1,\ 1 \leqq r$

$\boxed{13}$

無限等比級数の和

① $a = 0 \Longrightarrow 0$

② $-1 < r < 1 \Longrightarrow \dfrac{a}{1-r}$

ex.

$$1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{7}} = \frac{7}{6}$$

$\boxed{12}$

$\boxed{14}$ ~ $\boxed{16}$

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}}_{S_n} + \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

無限級数と無限等比級数の収束条件と和（まとめ）

	収束条件	和
無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} S_n$	S
無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$	$a=0$	0
	$-1<r<1$	$\frac{a}{1-r}$

注 無限等比数列の収束条件　$-1<r\leqq 1$

無限級数の収束・発散と a_n の極限

① $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束 $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

② $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散

逆は成り立たない

②は①の対偶

$\boxed{117}$

（証明）

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}_{S_n} + \cdots$

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ とすると ← これは定義より無限級数が収束することと同義

$n \geq 2$ のとき

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1})$

$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$

$= S - S$

$= 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} S_n$「nを大きくしていくと、S_nがどこに近づくか」

S_nは収束する無限級数の部分和なので、nを大きくしていくと、

S_nはSに近づく

S_{n-1}もSに近づく

$\therefore$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

（証明終）

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に収束するかどうか

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束

⇩

$a_n = ar^{n-1}$ か？

（等比数列）

⇨

$a=0$ のとき　和 $=0$

$a \neq 0$ のとき

$-1<r<1$　和 $= \dfrac{a}{1-r}$

⇩

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ か？

⇨

$\lim_{n\to\infty} S_n = \underbrace{S}_{和}$

⇩

発散

関数の極限

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ 収束

極限値

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

発散

極限値なし

極限あり

極限なし

極限なし

$\boxed{18}$ $\boxed{20}$

極限と係数の決定

ex.

次の等式が成り立つように定数 a, b の値を定めよ.

$$\lim_{x \to 1} \frac{a\sqrt{x} - b}{x-1} = 2$$

(解答)

$\lim_{x \to 1} (a\sqrt{x} - b) = 0$ より

$a - b = 0$

$a = b$

$$\lim_{x \to 1} \frac{a\sqrt{x} - a}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{a(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{a}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{a}{2} = 2$$

$\therefore$ $a = 4$, $b = 4$ //

極限値が存在して

$\lim \frac{0}{0}$

分母が 0 なら 分子も 0

$x \to 1$ より 分母 $\to 0$

このとき 極限値が存在する

ためには 分子 $\to 0$

つまり, $\frac{0}{0}$ の不定形でなければ

ならない

$\boxed{19}$

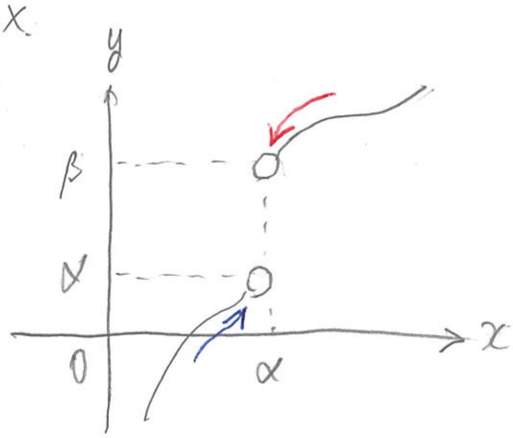
片側極限

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha \quad (左側極限)$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \beta \quad (右側極限)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \iff \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha$$

ex.



$$\lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x)$$

$\lim_{x \to a} f(x)$ は存在しない

片側極限を求めるときは グラフをかいて考える.

$\boxed{21}$ ~ $\boxed{23}$

$\boxed{25}$

分数関数・無理関数の不定形

分数関数の不定形 $\longrightarrow$ 約分 か 分母の最高次の項でわる

無理関数の不定形 $\longrightarrow$ 分母 または 分子の有理化

ex $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x} + x \right)$

$x = -t$

$x \longrightarrow -\infty$

$t \longrightarrow \infty$

(解答)

$x = -t$ とおくと

$$\lim_{t \to \infty} \left(\sqrt{t^2-t} - t \right) = \lim_{t \to \infty} \frac{\left(\sqrt{t^2-t} - t\right)\left(\sqrt{t^2-t} + t\right)}{\sqrt{t^2-t} + t}$$

有理化

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{-t}{\sqrt{t^2-t} + t}$$

t でわる

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}} + 1}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$x = -t$ でおかないと.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x} + x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x}{-x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \frac{x}{-x}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$x > 0$

$\sqrt{x^2} = x$

$x < 0$

$\sqrt{x^2} = -x$

$\boxed{24}$

三角関数の極限

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin ●}{●}=1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1\\[2ex]\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\end{array}}$$

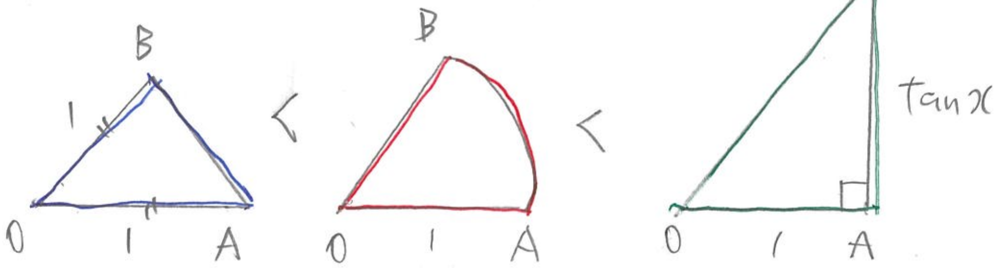
$\boxed{28}$ $\boxed{29}$

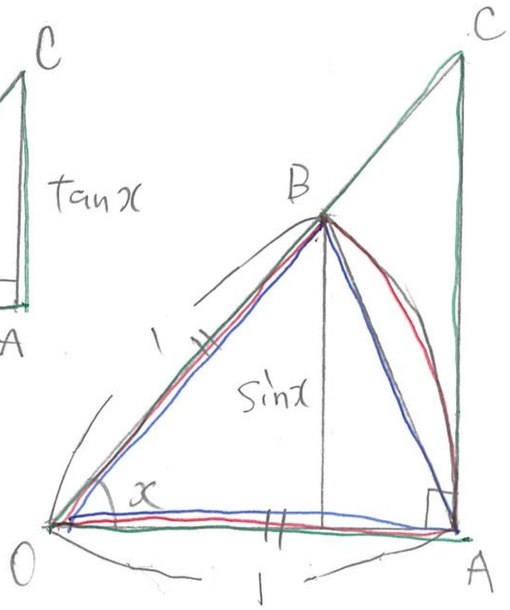
ex.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=\underline{\underline{2}}$$

(証明)

x はラジアン $\boxed{x^\circ=\frac{\pi}{180}x\text{(ラジアン)}}$





二等辺△ < 扇型 < 直角△

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$$

↓ ×2，逆数とる

$$\frac{1}{\tan x}<\frac{1}{x}<\frac{1}{\sin x}$$

↓ ×sin x

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

扇形の S

$$S=\frac{1}{2}rl$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

はさみうちの定理より

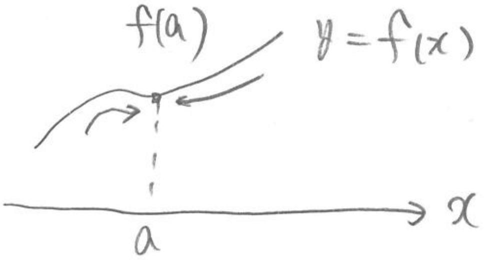
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

(証明終)

関数の連続性

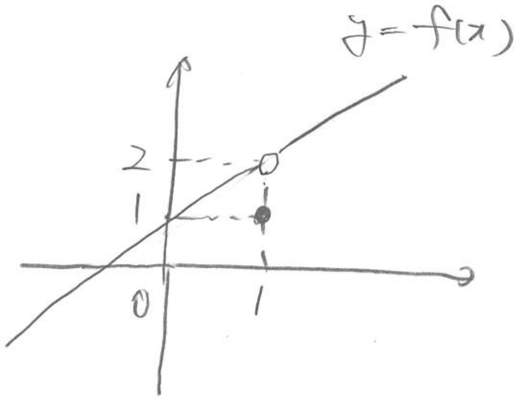
$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \iff \lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha$$

$f(x)$ が $x=a$ で連続 $\iff$ $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ が存在



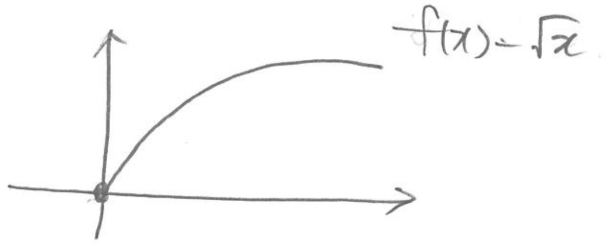
ex

① $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq 1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$



$\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$ ∴ 不連続

② $f(x)=\sqrt{x}$



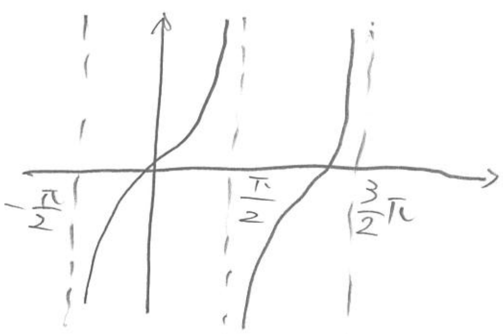
$\displaystyle\lim_{x\to +0} f(x)=f(0)=0$

∴ 連続　端点のとき、片側のみ

③ $f(x)=\tan x$

$x=\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi \cdots\cdots$

で連続



$\boxed{27}\sim\boxed{29}$

ガウス記号

$[x]$ … x を超えない最大の整数

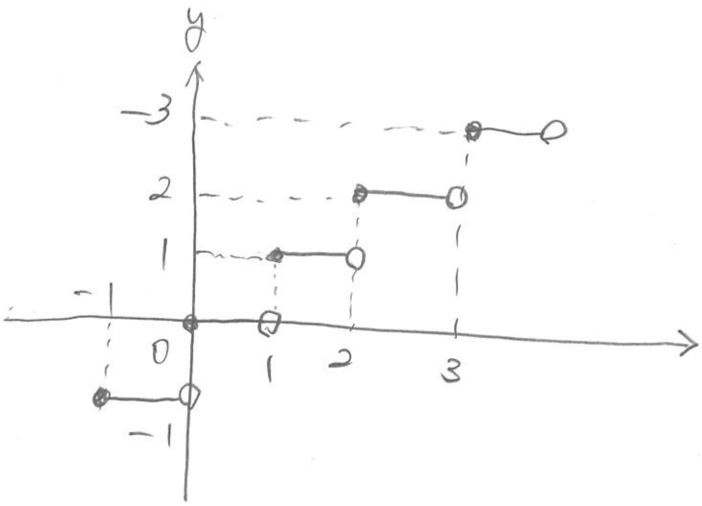
$n \leqq x < n+1$ を満たす整数 n

ex.

$[2.1] = 2$　　$[5.7] = 5$

$[-2.1] = -3$　　$[-5.7] = -6$

$f(x) = [x]$



$\lim_{x \to 1+0} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 1-0} f(x) = 0$

∴ 不連続

$\boxed{30}$

開区間，閉区間

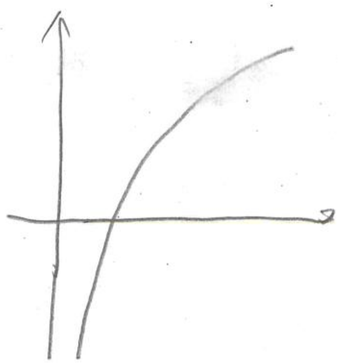
$$a < x \leqq b \implies (x, b]$$

$$x \leqq b \implies (-\infty, b]$$

ex.

① $y = \log_2 x$

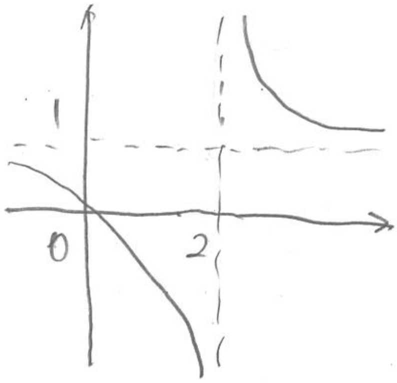
$(0, \infty)$ で連続



② $y = \dfrac{2}{x-2} + 1$

$(-\infty, 2), (2, \infty)$

で連続



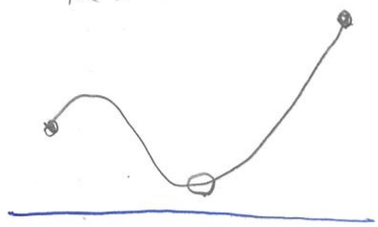
メリット

① 視覚的にわかりやすい

② どこで連続かわかる

（閉区間で連続なら Max. min が存在する．）

反例



$\boxed{31}$ ～ $\boxed{33}$