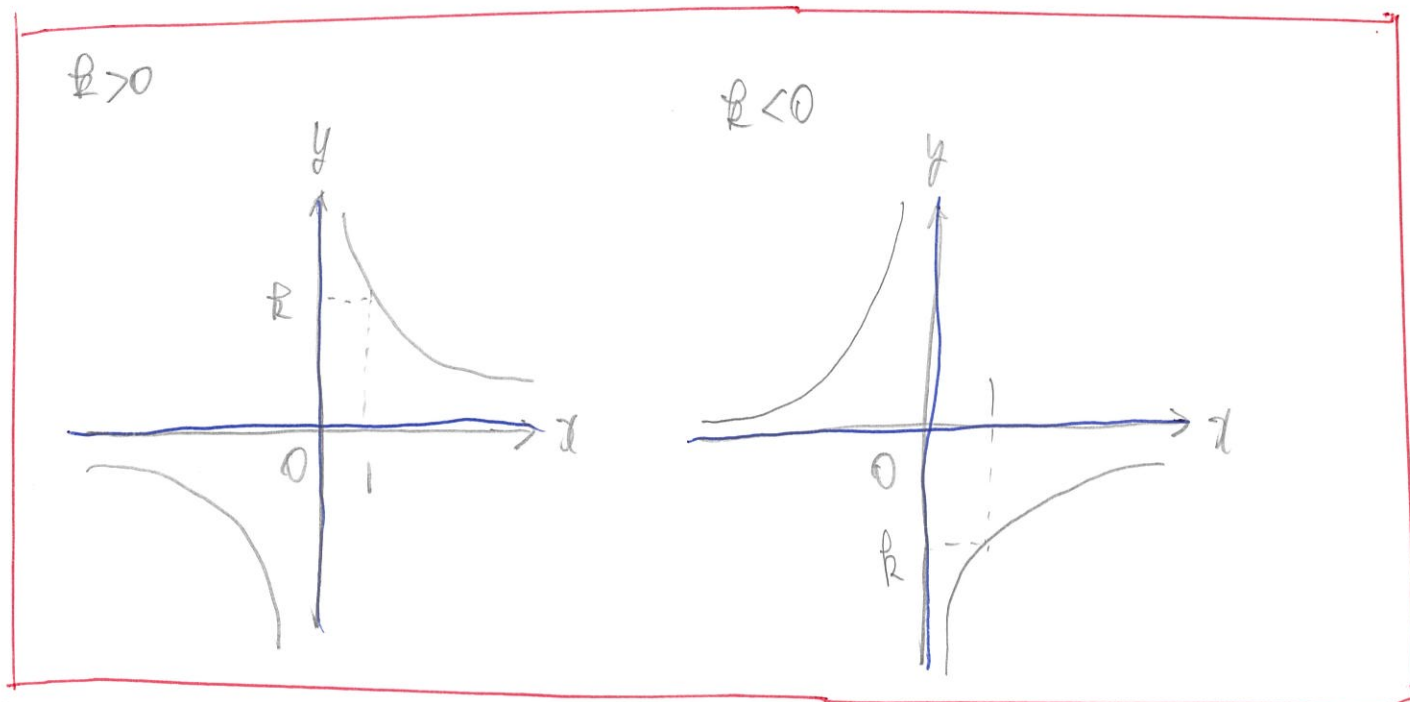


函数

分式函数

① $y = \frac{k}{x}$ $a > 0$

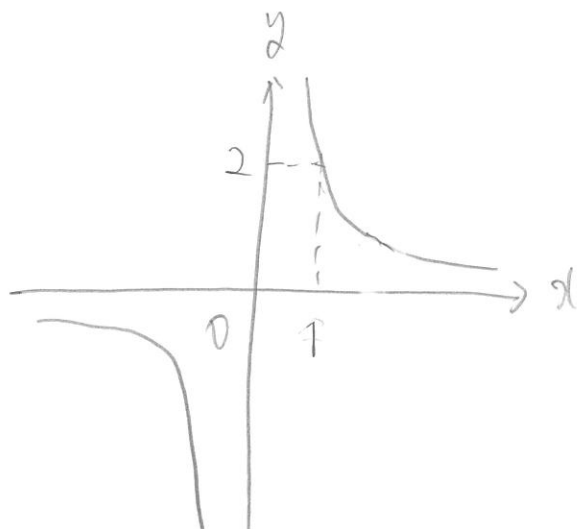


i) 渐近线 x轴 & y轴

ii) 原点对称.

例

$y = \frac{2}{x}$ $a > 0$

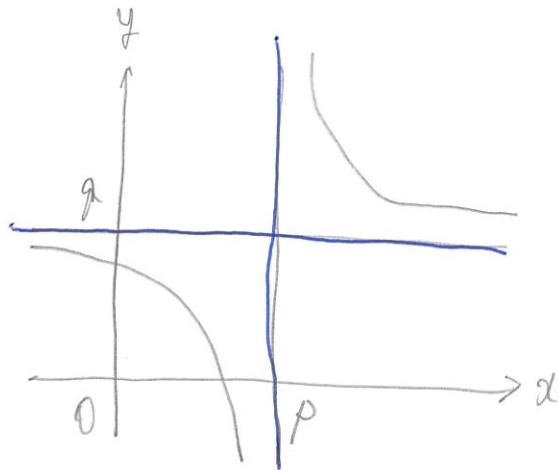


定义域 $x \neq 0$

值域 $y \neq 0$

② $y = \frac{k}{x-p} + q$ のグラフ

$k > 0$



$y = \frac{k}{x}$ のグラフ

x軸方向に p

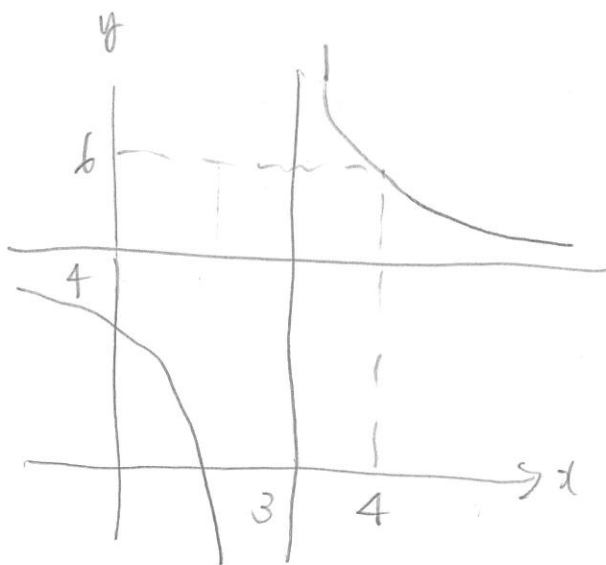
y軸方向に q 平行移動

i) 漸近線 $x=p$ と $y=q$

ii) (p, q) に対称

例

$y = \frac{2}{x-3} + 4$ のグラフ



定義域 $x \neq 3$

値域 $y \neq 4$

③ $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0, ad-bc \neq 0)$

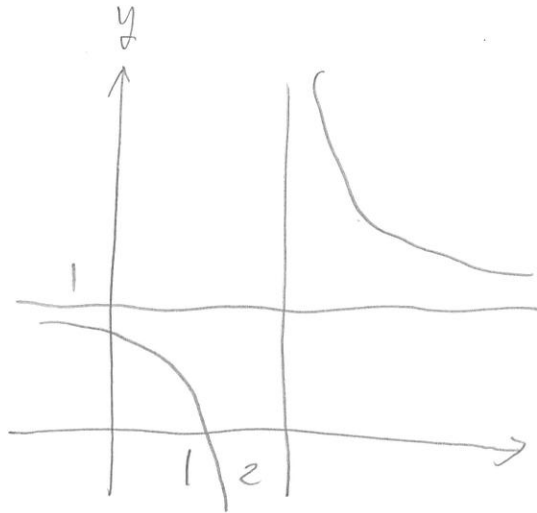
② のグラフに變形して見る

例

(1) $y = \frac{x-1}{x-2}$

$$= \frac{x-2+1}{x-2}$$

$$= \frac{1}{x-2} + 1$$



定義域 $x \neq 2$
 値域 $y \neq 1$

(2)

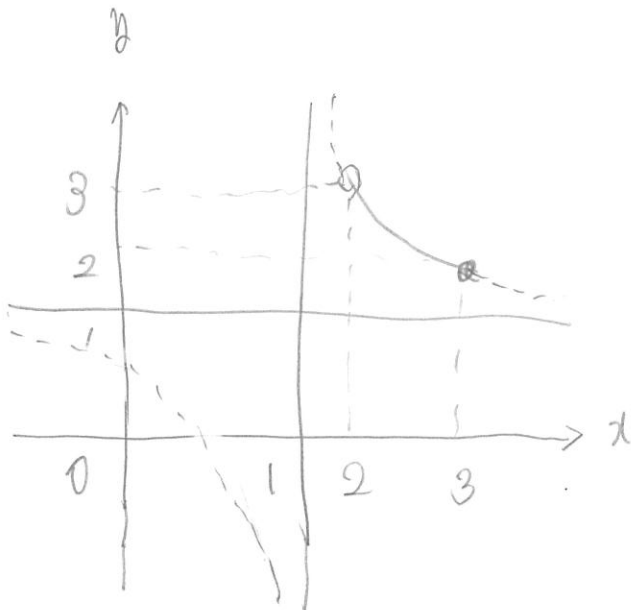
$$y = \frac{2x}{x-1}$$

$$(2 < x \leq 3)$$

$$= \frac{2(x-1) + 2}{x-1}$$

分母の $x-1$ を割ると $= 1 + \frac{2}{x-1}$
真分式 $\frac{2}{x-1}$ $2 < x < 3$

$$= \frac{2}{x-1} + 1$$



値域 $2 \leq y < 3$

2

4

分母関数の方程式・不等式

例 1 次の方程式、不等式を解け

$$(1) \frac{3}{x+1} = x-1$$

$$(2) \frac{3}{x+1} \geq x-1$$

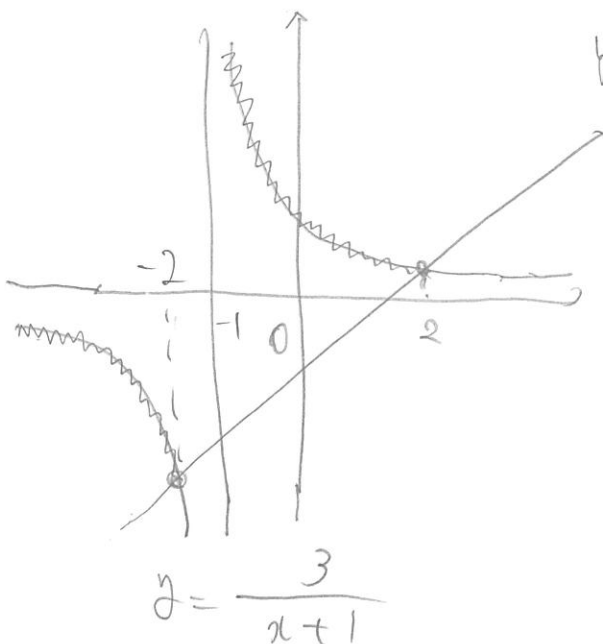
$$(1) \quad \begin{aligned} 3 &= x^2 - 1 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

分母関数の

不等式は \times

$$(2) \quad \begin{aligned} 3 &\geq x^2 - 1 \\ x^2 &\leq 4 \\ -2 &\leq x \leq 2 \end{aligned}$$

\Rightarrow グラフを解く



左図より

$$\underline{x \leq -2, -1 < x \leq 2}$$

もし計算が正なら...

$$\frac{3}{x+1} \geq x-1$$

$$x \neq -1$$

$$i) x+1 > 0$$

$$x > -1 \quad \text{and} \quad \exists$$

$$3 \geq x^2 - 1$$

$$x^2 \leq 4$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

∴

$$\underline{-1 < x \leq 2}$$

$$ii) x+1 < 0$$

$$x < -1 \quad \text{and} \quad \exists$$

$$3 \leq x^2 - 1$$

$$x^2 \geq 4$$

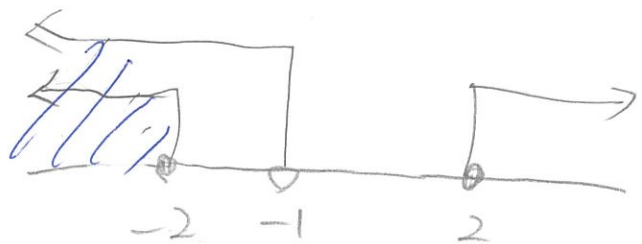
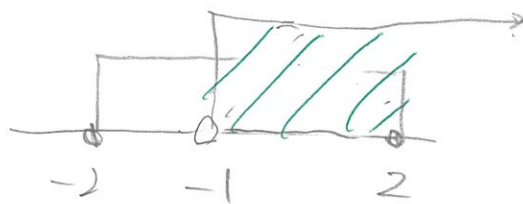
$$x \leq -2, 2 \leq x$$

$$\therefore \underline{x \leq -2}$$

両辺に $x+1$ をかけること.

$x+1$ の $\oplus \ominus$ に注意する必要がある.

⇨ $x+1 > 0$ $x+1 < 0$
で場合分け

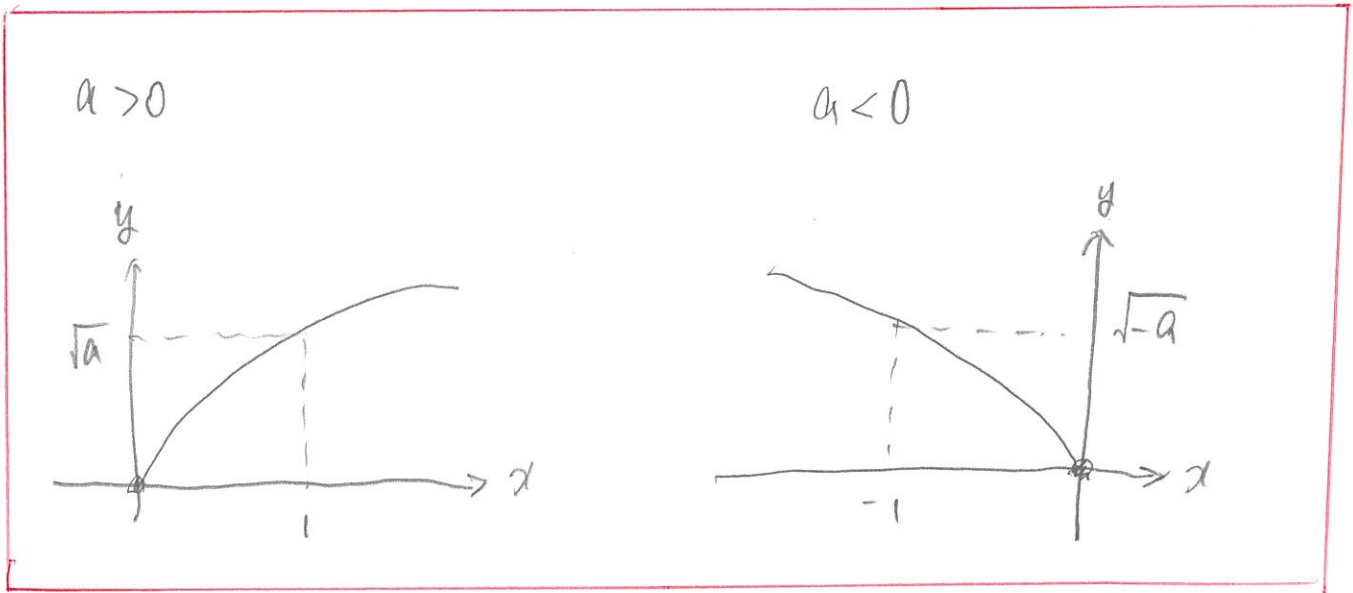


!) !!) ≠)

$$\underline{x \leq -2, -1 < x \leq 2}$$

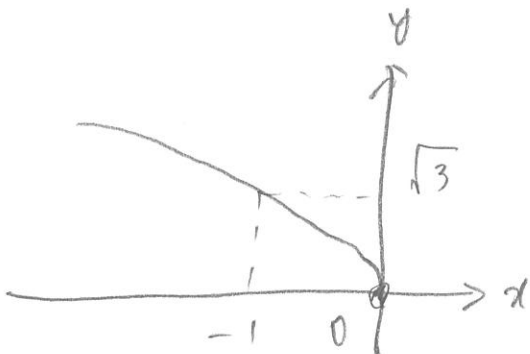
无理函数

① $y = \sqrt{ax}$ $a \neq 0$



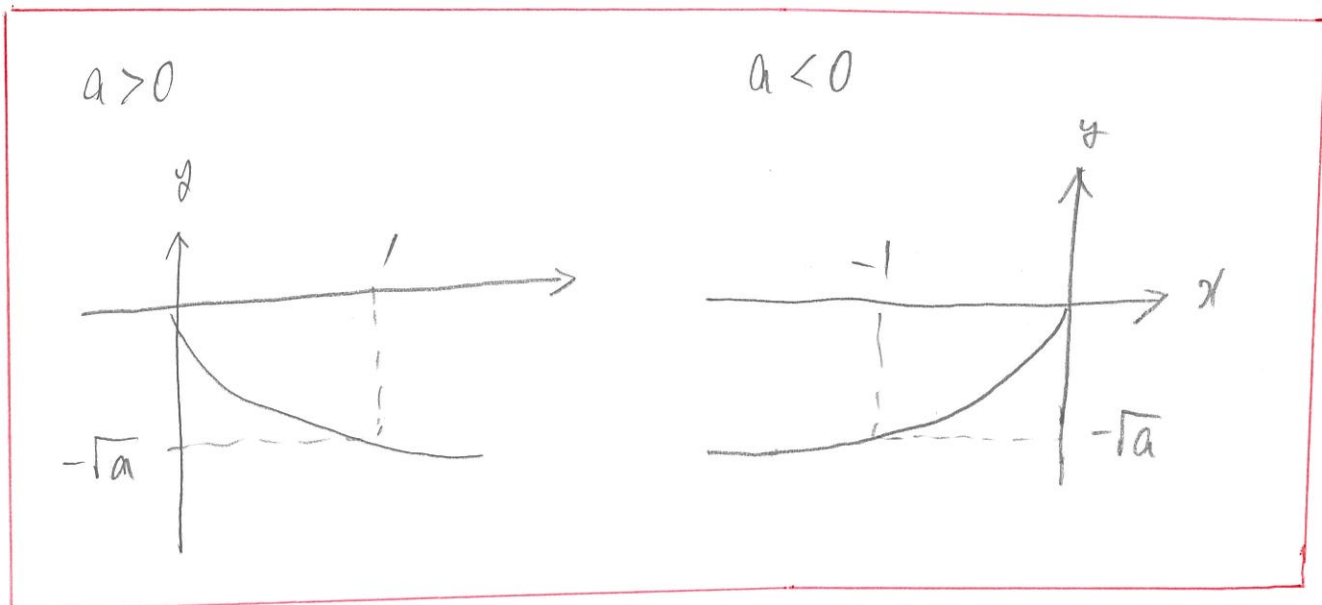
例

$y = \sqrt{-3x}$



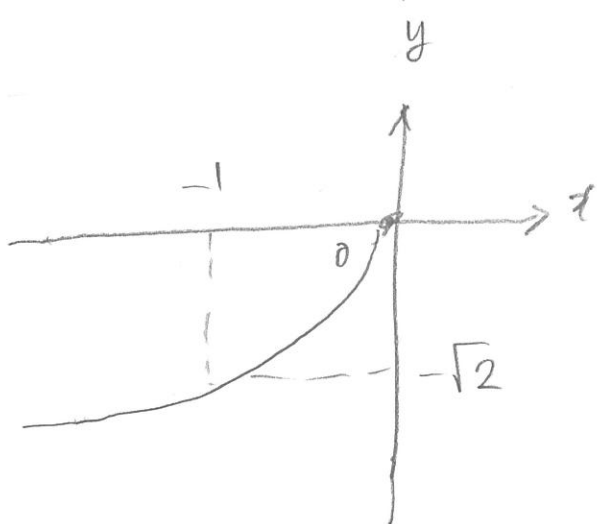
定义域 $x \leq 0$
值域 $y \geq 0$

② $y = -\sqrt{ax}$ $a \neq 0$



例

$y = -\sqrt{-2x}$ $a \neq 0$



定义域 $x \leq 0$
 值域 $y \leq 0$

③ $y = \sqrt{ax+b} + c$ のグラフ

例

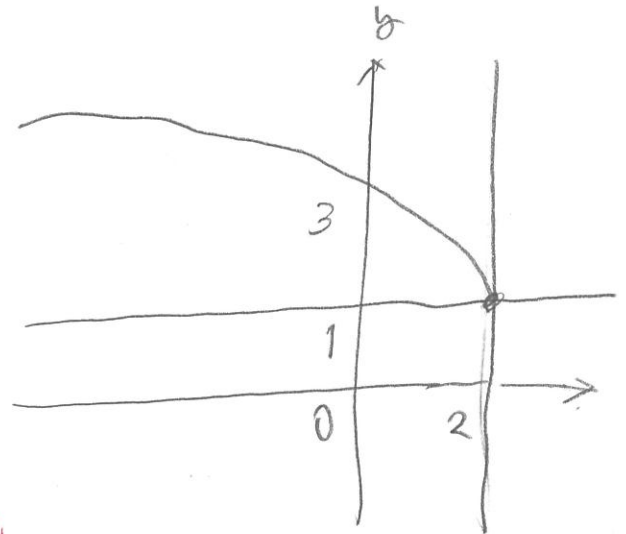
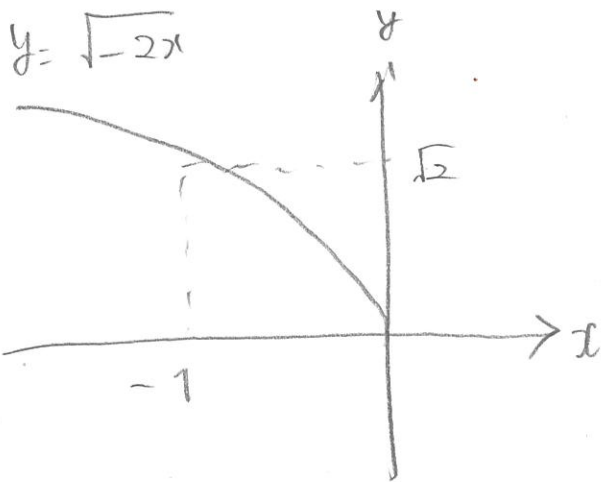
$y = \sqrt{-2x+4} + 1$ のグラフ

$y = \sqrt{-2(x-2)} + 1$

これは $y = \sqrt{-2x}$ のグラフ

x軸方向に 2

y軸方向に 1 平行移動してグラフを作る



定義域 $x \leq 2$

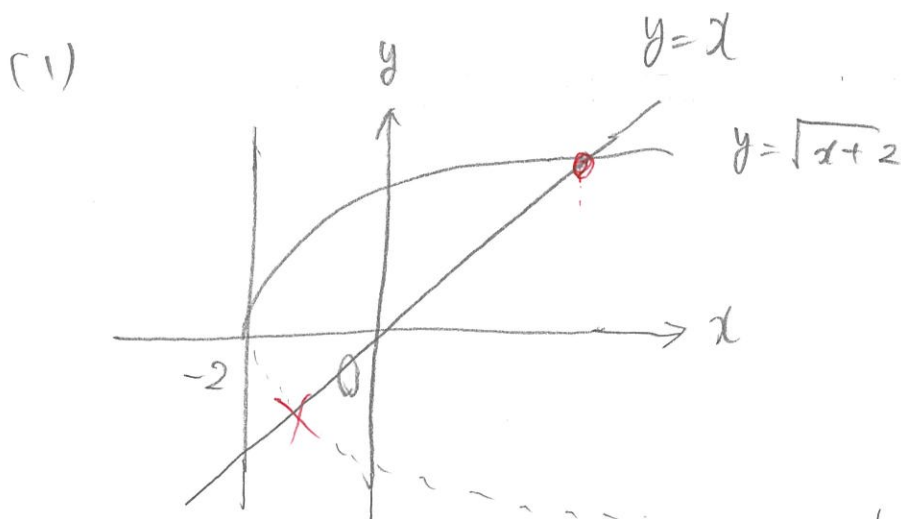
値域 $y \geq 1$

無理関数の方程式・不等式

例. 次の方程式, 不等式を解け

(1) $\sqrt{x+2} = x$

(2) $\sqrt{x+2} > x$



$$\begin{aligned}x+2 &= x^2 \\x^2 - x - 2 &= 0 \\(x-2)(x+1) &= 0\end{aligned}$$

$$x = \cancel{1}, 2$$

答えは $x=2$ だけ

$$\underline{x=2}$$

根号の中は正の数

$$\sqrt{\quad} \Rightarrow \quad > 0$$

$$\underline{x+2 > 0}$$

$$x > -2 \quad \text{--- ①}$$

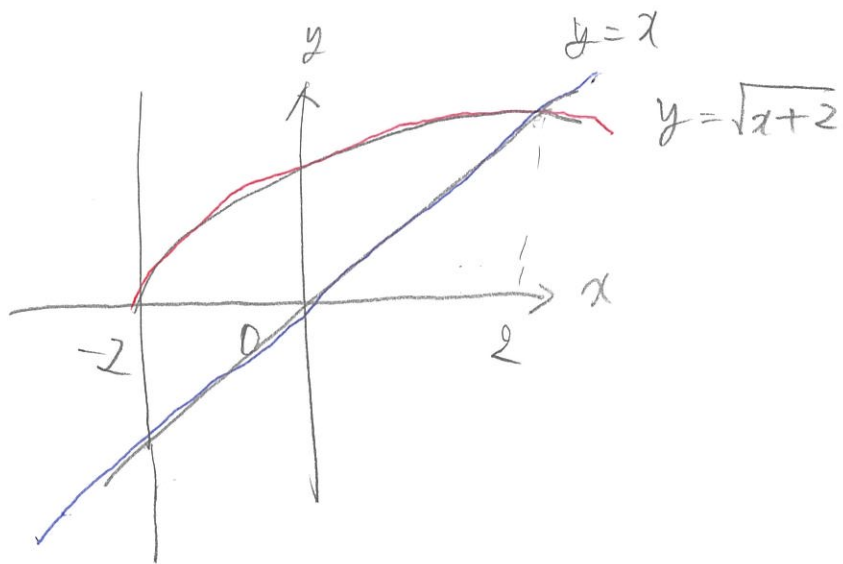
$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x = -1, 2$$

①より

$$\underline{x=2}$$

(2)



$$\underline{\sqrt{x+2}} > \underline{x}$$

$$x'' > x'$$

$$\underline{-2 \leq x \leq 2}$$

5

逆関数

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

例

$$y = 3x + 1 \quad (0 \leq x \leq 2) \quad \text{の逆関数}$$

$$3x = y - 1 \quad (1 \leq y \leq 7)$$

$$x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1} \quad x = y \text{ にする}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \quad (1 \leq x \leq 7)$$

$$\textcircled{2} \quad x \text{ と } y \text{ を } \lambda \text{ に換える}$$

注 定義域 \rightarrow 値域

逆関数の性質

$$\textcircled{1} \quad f \text{ と } f^{-1} \text{ は } y = x \text{ に対称}$$

$$\textcircled{2} \quad f(f^{-1}(x)) = x, \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

例

次の関数の逆関数を求めよ.

$$(1) \quad y = \frac{x+1}{x-2}$$

$$(2) \quad y = x^2 + 3 \quad (x \geq 0)$$

$$(1) \quad y = \frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2+3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1 \quad (y \neq 1)$$

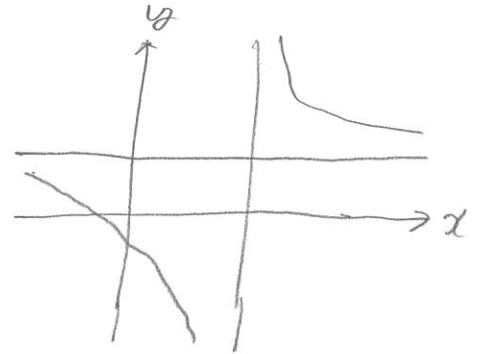
$$(x-2)y = x+1$$

$$yx - x = 2y + 1$$

$$x = \frac{2y+1}{y-1}$$

$$y = \frac{2x+1}{x-1}$$

値域を調べた.

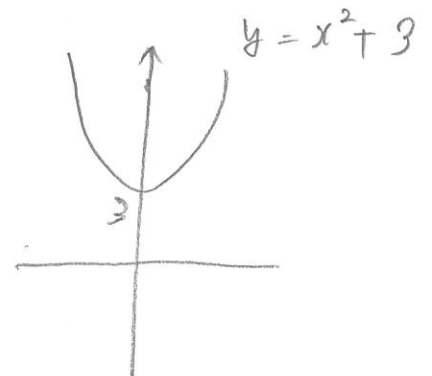


$$(2) \quad y = x^2 + 3 \quad (x \geq 0)$$

$$x^2 = 3 - y \quad (y \geq 3)$$

$$x = \sqrt{3-y} \quad (x \geq 0 \text{ かつ } y)$$

$$y = \sqrt{3-x} \quad (x \geq 3)$$



78

例1

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+3} \quad \& \quad f^{-1}(x) \text{ について } f(1)=1, f^{-1}(4)=-1$$

7" あるとき. 定数 a, b の値を求めよ.

(解答)

$$f(1) = \frac{a+b}{4} = 1$$

$$a+b=4 \quad \text{--- ①}$$

$$y = \frac{ax+b}{x+3}$$

$$yx + 3y = ax + b$$

$$(y-a)x = b-3y$$

$$x = \frac{b-3y}{y-a}$$

$$f^{-1}(4) = \frac{a-12}{4-a} = -1$$

$$a-12 = a-4$$

$$a-a = -8 \quad \text{--- ②}$$

$$y = \frac{b-3x}{x-a}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{b-3x}{x-a}$$

①②より

$$2a = -4$$

$$a = -2$$

$$b = 6$$

9 10 11

合成関数

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

例

$g(x)$ の x に $f(x)$ を代入

$$f(x) = x^2 + 2$$

$$g(x) = 3x - 1 \quad \text{の合成関数} \quad (g \circ f)(x)$$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= 3(x^2 + 2) - 1 \\ &= \underline{3x^2 + 5} \end{aligned}$$

- $g(f(x)) \neq f(g(x))$ 逆は成り立たない.

例

$$f(x) = x + 2$$

$$g(x) = ax^2 + bx + 1 \quad x \rightarrow 112$$

$$(g \circ f)x = 2x^2 + 8x + 9 \quad \text{成り立つように}$$

定数 a, b の値を求めよ

(解答)

$$(g \circ f)x = g(f(x)) = 2x^2 + 8x + 9$$

$$a(x+2)^2 + b(x+2) + 1 = 2x^2 + 8x + 9$$

x についての恒等式と見做す

$$a(x^2 + 4x + 4) + b(x + 2) + 1 = 2x^2 + 8x + 9$$

$$ax^2 + (4a + b)x + 4a + 2b + 1 = 2x^2 + 8x + 9$$

係数比較して

$$\begin{cases} a = 2 \\ 4a + b = 8 \\ 4a + 2b + 1 = 9 \end{cases}$$

$$\underline{a = 2, b = 0}$$