漸化式（公式）

等差型

$a_{n+1}-a_n=d$ ⟹ 公差 d の等差数列

$a_1=-3$，$a_{n+1}=a_n+4$

解き方

初項 -3，公差 4 の等比数列

$a_n=-3+(n-1)\cdot 4$

等比型

$a_{n+1}=ra_n$ ⟹ 公比 r の等比数列

$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n$

解き方

初項 1，公比 2 の等比数列

$a_n=2^{n-1}$

階差型

$a_{n+1}=a_n+f(n)$ ⟹ $f(n)$ が一般項の階差数列

$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3^n$

解き方

k に変える

$n\geqq 2$ のとき

$a_n=a_1+\sum_{n=1}^{n-1}3^k$

特性方程式型

$a_{n+1}=pa_n+q$ ⟹ 特性方程式

$a_1=6$，$a_{n+1}=4a_n-3$

解き方

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=4a_n-3 \\ -) & 1=4\cdot 1-3 \\ \hline & a_{n+1}-1=4(a_n-1) \end{array}$$

$\alpha=4\alpha-3$

$\alpha=1$

特性階差型

$a_{n+1}=pa_n+f(n)$ ⟹ $a_{n+2}=pa_{n+1}+f(n+1)$ と引き算

$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4n$ ……①

解き方

$a_{n+2}=3a_{n+1}+4(n+1)$ ……②

② − ①

$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+4$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおいて特性方程式へ

分数型

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{pa_n+q}$ ⟹ 逆数をとる

$a_1=\dfrac{1}{5}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n-1}$

解き方

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{4a_n-1}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=-\dfrac{1}{a_n}+4$ $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおいて特性方程式へ

指数型

$a_{n+1}=pa_n+q^n$ ⟹ q^{n+1} で割る

$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+3^{n+1}$

解き方

$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2a_n}{3^{n+1}}+1$

$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+1$ $b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおいて特性方程式へ

対数型

$a_{n+1}=pa_n{}^q$ ⟹ 底が p の対数をとる

$a_1=1$，$a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$

解き方

$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2\sqrt{a_n}$

$\log_2 a_{n+1}=\log_2\sqrt{a_n}+1$

$\log_2 a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\log_2 a_n+1$ $b_n=\log_2 a_n$ とおいて特性方程式へ

階比型

$a_{n+1}=f(n)a_n$ ⟹ $a_n=f(n)f(n-1)\cdots\cdots f(2)a_1$

$a_1=\dfrac{1}{2}$，$(n+1)a_{n+1}=(n-1)a_n$ $(n\geqq 2)$

解き方

$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$

$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-1}\cdot\dfrac{n-4}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}a_1$

部分分数分解型

$a_{n+1}=f(n)a_n+q$ ⟹ n の式で両辺割る

$a_1=2$，$na_{n+1}=(n+1)a_n+1$

解き方

両辺を $n(n+1)$ で割ると

$\dfrac{a_n}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{1}{n(n+1)}$ $b_n=\dfrac{a_n}{n}$ とおいて階差数列へ