1 【等差型】

$a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+3$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

初2、公比3 の等差数列

$a_n=2+(n-1)\cdot 3$

$=\underline{3n-1}$

2 【等比型】

$a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

初1、公比2 の等比数列

$a_n=\underline{2^{n-1}}$

3 【階差型】

$a_1=0$, $a_{n+1}=a_n+2n+1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$n\geqq 2$ のとき

$a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$

$=2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}$

$=n(n-1)+(n-1)$

$=(n-1)(n+1)$

$n=1$ のとき

$a_1=(1-1)(1+1)$

$=0$

よって、 $\underline{a_n=(n-1)(n+1)}$

4 【特定方程式型】

$a_1=5$, $a_{n+1}=4a_n-6$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\underline{-\ 2=4\cdot 2-6}$

$\alpha=4\alpha-6$

$3\alpha=6$

$\alpha=2$

$\begin{cases} a_{n+1}-2=4(a_n-2) \\ a_1-2=5-2=3 \end{cases}$

$\{a_n-2\}$ は初3 公比4 の等比数列

$a_n-2=3\cdot 4^{n-1}$

$a_n=\underline{3\cdot 4^{n-1}+2}$

5 【特性階差型】

$a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n+4n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 —①

$a_{n+2}=3a_{n+1}+4(n+1)$ —②

②−①

$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+4$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと

$b_{n+1}=3b_n+4$

$\alpha=3\alpha+4$

$\alpha=-2$

$\begin{cases} b_{n+1}+2=3(b_n+2) \\ b_1+2=a_2-a_1+2=3a_1+4-a_1+2=8 \end{cases}$

$\{b_n+2\}$ は初8 公比3 の等比数列

$b_n+2=8\cdot 3^{n-1}$

$b_n=8\cdot 3^{n-1}-2$

$a_{n+1}-a_n=8\cdot 3^{n-1}-2$

$n\geqq 2$ のとき

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(8\cdot 3^{k-1}-2)$

$=1+8\cdot\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}-2(n-1)$

初1 公比3 項数 $n-1$ の等比数列

$=1+8\cdot\dfrac{3^{n-1}-1}{3-1}-2n+2$

$=4\cdot 3^{n-1}-2n-1$

$n=1$ のとき $a_1=4-2-1=1$

よって、 $a_n=\underline{4\cdot 3^{n-1}-2n-1}$

6 【分数型】

$a_1=\frac{1}{5}$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{4a_n-1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

逆数をとると

$\alpha=-\alpha+4$

$\alpha=2$

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=-\dfrac{1}{a_n}+4$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと

$b_{n+1}=-b_n+4$

$\begin{cases} b_{n+1}-2=-(b_n-2) \\ b_1-2=5-2=3 \end{cases}$

$\{b_n-2\}$ は初3 公比−1 の等比数列

$b_n-2=3\cdot(-1)^n$

$b_n=3\cdot(-1)^n+2$

$\dfrac{1}{a_n}=3\cdot(-1)^n+2$

$a_n=\underline{\dfrac{1}{3\cdot(-1)^n+2}}$

7 【指数型】

$a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n+3^{n+1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{a_n}{3^n}+1$$

$b_n=\frac{a_n}{3^n}$ とおくと．　　$\alpha=\frac{2}{3}\alpha+1$

$\alpha=3$

$$b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+1$$

$$\begin{cases} b_{n+1}-3=\frac{2}{3}(b_n-3) \\ b_1-3=\frac{a_1}{3}-3=-2 \end{cases}$$

$\{b_n-3\}$ は初項 -2 公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列

$$b_n-3=-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$b_n=3-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{a_n}{3^n}=3-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_n=3^n\left\{3-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\underline{-3\cdot2^n+3^{n+1}}$$

8 【対数型】

$a_1=1,\ a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

両辺に $\log_2$ をとると．

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2\sqrt{a_n}$$

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2+\log_2\sqrt{a_n}$$

$$\log_2 a_{n+1}=\frac{1}{2}\log_2 a_n+1$$

$\alpha=\frac{1}{2}\alpha+1$

$b_n=\log_2 a_n$ とおくと．　　$\frac{1}{2}\alpha=1$

$\alpha=2$

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+1$$

$$\begin{cases} b_{n+1}-2=\frac{1}{2}(b_n-2) \\ b_1-2=\log_2 1-2=-2 \end{cases}$$

$$b_n-2=-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n=2-2\cdot2^{1-n}$$

$$b_n=2-2^{2-n}$$

$$\log_2 a_n=2-2^{2-n}$$

$$a_n=\underline{2^{2-2^{2-n}}}$$

9 【階比型】

$a_1=3,\ (n+1)a_{n+1}=(n-1)a_n\ \ (n\geqq2)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}a_n$$

$$a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}a_{n-1}$$

$$a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdots\frac{1}{3}a_1$$

$$=\underline{\frac{1}{n(n+1)}}$$

10 【部分分数分解型】

$a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{n+2}{n}a_n+1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

両辺を $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ で割ると．

$$\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$b_n=\frac{a_n}{n(n+1)}$ とおくと．

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$b_1=\frac{a_1}{1\cdot2}=1$$

$n\geqq2$ のとき．

$$b_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=1+\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{3n+1}{2(n+1)}$$

$n=1$ のとき．

$b_1=\frac{4}{2\cdot2}=1$　となり成立．

よって．

$$\frac{a_n}{n(n+1)}=\frac{3n+1}{2(n+1)}$$

$$a_n=\underline{\frac{n(3n+1)}{2}}$$