

## 1 【等差型】

$a_1=2, a_{n+1}=a_n+3$  によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

初2, 公差3の等差数列

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3 \\ = \underline{3n-1}$$

## 2 【等比型】

$a_1=1, a_{n+1}=2a_n$  によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

初1, 公比2の等比数列

$$a_n = \underline{2^{n-1}}$$

## 3 【階差型】

$a_1=0, a_{n+1}=a_n+2n+1$  によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

$n \geq 2$  のとき

$$a_n = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$= n(n-1) + (n-1)$$

$$= (n-1)(n+1)$$

$n=1$  のとき

$$a_1 = (1-1)(1+1) \\ = 0$$

$$\therefore \underline{a_n = (n-1)(n+1)}$$

## 4 【特定方程式型】

$a_1=5, a_{n+1}=4a_n-6$  によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

$$-2 = 4 \cdot 2 - 6$$

$$\begin{cases} a_{n+1} - 2 = 4(a_n - 2) \\ a_1 - 2 = 5 - 2 = 3 \end{cases}$$

$$x = 4x - 6$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

$\{a_n - 2\}$  は初3 公比4の等比数列

$$a_n - 2 = 3 \cdot 4^{n-1}$$

$$\underline{a_n = 3 \cdot 4^{n-1} + 2}$$

## 5 【特性階差型】

$a_1=1, a_{n+1}=3a_n+4n$  によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4(n+1) \quad \text{--- ②}$$

$$\text{②} - \text{①}$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) + 4$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad \text{と } n < \infty$$

$$b_{n+1} = 3b_n + 4 \quad \alpha = 3\alpha + 4$$

$$\alpha = -2$$

$$\begin{cases} b_{n+1} + 2 = 3(b_n + 2) \\ b_1 + 2 = a_2 - a_1 + 2 = 3a_1 + 4 - a_1 + 2 = 8 \end{cases}$$

$\{b_n + 2\}$  は初8 公比3の等比数列

$$b_{n+2} = 8 \cdot 3^{n-1}$$

$$b_n = 8 \cdot 3^{n-1} - 2$$

$$a_{n+1} - a_n = 8 \cdot 3^{n-1} - 2$$

$n \geq 2$  のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (8 \cdot 3^{k-1} - 2)$$

$$= 1 + 8 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} - 2(n-1)$$

初1 公比3 項数  $n-1$  の等比数列

$$= 1 + 8 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3-1} - 2n + 2$$

$$= 4 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1$$

$$n=1 \text{ のとき } a_1 = 4 \cdot 3^{0-1} - 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$\therefore \underline{a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1}$$

## 6 【分数型】

$a_1 = \frac{1}{5}, a_{n+1} = \frac{a_n}{4a_n - 1}$  によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

逆数をとると

$$\alpha = -\alpha + 4$$

$$\alpha = 2$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = -\frac{1}{a_n} + 4$$

$$b_n = \frac{1}{a_n} \quad \text{と } n < \infty$$

$$b_{n-2} = 3 - (-1)^{n-1}$$

$$b_n = 3 - (-1)^{n-1} + 2$$

$$b_{n+1} = -b_n + 4$$

$$\frac{1}{a_n} = 3 - (-1)^{n-1} + 2$$

$$\begin{cases} b_{n+1} - 2 = -(b_n - 2) \\ b_1 - 2 = 5 - 2 = 3 \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{3 - (-1)^{n-1} + 2}$$

$\{b_n - 2\}$  は初3 公比-1の等比数列

## 7 【指数型】

$a_1=3, a_{n+1}=2a_n+3^{n+1}$  によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

両辺  $\times 3^{-n+1}$  とする

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + 1$$

$$b_n = \frac{a_n}{3^n} \text{ とおくと } \alpha = \frac{2}{3}\alpha + 1$$

$$\alpha = 3$$

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + 1$$

$$\begin{cases} b_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}(b_n - 3) \\ b_1 - 3 = \frac{a_1}{3} - 3 = -2 \end{cases}$$

$\{b_n - 3\}$  は初項  $-2$  公比  $\frac{2}{3}$  の等比数列

$$b_n - 3 = -2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$b_n = 3 - 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_n = 3^n \left\{ 3 - 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right\}$$

$$\frac{a_n}{3^n} = 3 - 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$= \underline{\underline{-3 \cdot 2^n + 3^{n+1}}}$$

## 8 【対数型】

$a_1=1, a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$  によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

両辺に  $\log_2$  とする

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2\sqrt{a_n}$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2 + \log_2 \sqrt{a_n}$$

$$\log_2 a_{n+1} = \frac{1}{2} \log_2 a_n + 1 \quad \alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1$$

$$b_n = \log_2 a_n \text{ とおくと } \frac{1}{2}\alpha = 1$$

$$\alpha = 2$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + 1$$

$$\begin{cases} b_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(b_n - 2) \\ b_1 - 2 = \log_2 1 - 2 = -2 \end{cases}$$

$$b_1 - 2 = \log_2 1 - 2 = -2$$

$$b_n - 2 = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n = 2 - 2 \cdot 2^{1-n}$$

$$b_n = 2 - 2^{2-n}$$

$$\log_2 a_n = 2 - 2^{2-n}$$

$$a_n = \underline{\underline{2^{2-2^{2-n}}}}$$

## 9 【階比型】

$a_1 = \frac{1}{2}, (n+1)a_n = (n-1)a_{n-1} (n \geq 2)$  で定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1}$$

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} a_{n-2}$$

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdots \frac{1}{3} a_1$$

$$= \frac{1}{n(n+1)}$$

## 10 【部分分数分解型】

$a_1=2, a_{n+1} = \frac{n+2}{n}a_n + 1$  によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

両辺  $\times \frac{1}{(n+1)(n+2)}$  とする

$$\frac{a_n}{(n+1)(n+2)} = \frac{a_n}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$b_n = \frac{a_n}{n(n+1)} \text{ とおくと}$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$b_1 = \frac{a_1}{1 \cdot 2} = 1$$

$n \geq 2$  のとき

$$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= 1 + \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{3n+1}{2(n+1)}$$

$n=1$  のとき

$$b_1 = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1 \quad \text{と一致成立}$$

$\rightarrow$

$$\frac{a_n}{n(n+1)} = \frac{3n+1}{2(n+1)}$$

$$a_n = \underline{\underline{\frac{n(3n+1)}{2}}}$$