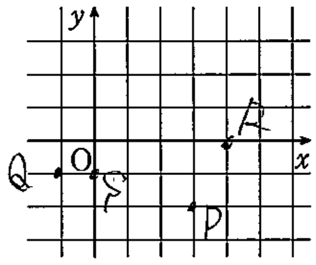
**1**【複素数平面】

次の点を複素数平面上に示せ。

P$(3-2i)$，Q$(-1-i)$，R$(4)$，S$(-i)$




**2**【複素数の絶対値】

次の複素数の絶対値を求めよ。

(1) $3-2i$

$\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

(2) $-2+4i$

$\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$

(3) $-5$

$5$

(4) $3i$

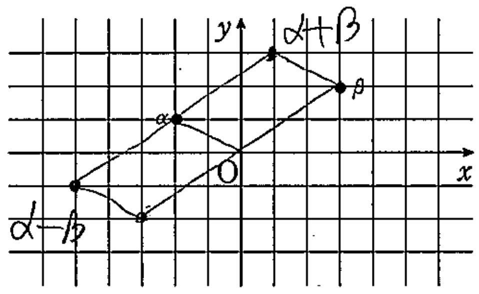
$3$

**3**【複素数の和と差】

右の図の複素数平面上の点 $\alpha$，$\beta$ について，次の点を図に示せ。

(1) $\alpha+\beta$

(2) $\alpha-\beta$




**4**【2点間の距離】

次の 2 点間の距離を求めよ。

(1) A$(2+3i)$，B$(1+6i)$

$\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

(2) A$(3-4i)$，B$(1-2i)$

$\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

**5**【複素数の実数倍】

$\alpha=1+yi$，$\beta=3-6i$ とする。2 点 A$(\alpha)$，B$(\beta)$ と原点 O が一直線上にあるとき，実数 $y$ の値を求めよ。

$\beta=k\alpha$

$3-6i=k+kyi$

$\begin{cases} k=3 \\ ky=-6 \end{cases}$

$y=-2$

**6**【共役複素数の性質】

複素数 $\alpha$，$\beta$ について，次のことを証明せよ。

(1) $\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$ は実数である。

$\boxed{z+\overline{z} \iff 実数}$

$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha\overline{\beta}}$

(2) $|\alpha|=1$，$|\beta|=1$ のとき $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\overline{\alpha+\beta}$

$|\alpha|^2=1$　$|\beta|^2=1$

$\alpha\overline{\alpha}=1$

$\dfrac{1}{\alpha}=\overline{\alpha}$　$\dfrac{1}{\beta}=\overline{\beta}$

$\boxed{|z|^2=z\overline{z}}$

(左辺) $=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

$=\overline{\alpha+\beta}=$ (右辺)

**7**

複素数 $z$ が，$2z+\overline{z}=3+i$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) $2\overline{z}+z$ を求めよ。

$2\overline{z}+z=\overline{2z+\overline{z}}=3-i$

(2) $z$ を求めよ。

$\begin{cases} 2z+\overline{z}=3+i & \text{—①} \\ z+2\overline{z}=3-i & \text{—②} \end{cases}$

①×2－② より

$3z=3+3i$

$z=1+i$

**8**

$|z|=3$ かつ $|z-2|=4$ を満たす複素数 $z$ について，次の値を求めよ。

(1) $z\overline{z}$

$z\overline{z}=|z|^2=9$

(2) $z+\overline{z}$

$|z-2|^2=16$

$(z-2)(\overline{z}-2)=16$

$\underbrace{z\overline{z}}_{=9}-2z-2\overline{z}=12$

$-2(z+\overline{z})=3$

$\therefore\ z+\overline{z}=-\dfrac{3}{2}$

**9**【複素数の極形式】

次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 $\theta$ の範囲は，(1)，(2) では $0\leqq\theta<2\pi$，(3) では $-\pi\leqq\theta\leqq\pi$ とする。

(1) $\sqrt{3}+i$

$=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

(2) $2+2i$

$=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

(3) $1-\sqrt{3}i$

$=2\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$

**10**

$z=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，複素数 $z+1$ を極形式で表せ。ただし，偏角 $\theta$ の範囲は $0\leqq\theta\leqq2\pi$ とする。

$z+1=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$=\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

**11**【複素数の積と商の極形式】

$\alpha=2+2i$，$\beta=\sqrt{3}+i$ のとき，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 $\theta$ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

$\alpha=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\beta=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\alpha\beta=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{12}\pi+i\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

**12**【原点を中心とする回転】

次の点は，点 $z$ をどのように回転した点か。ただし，回転の角 $\theta$ の範囲は $-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

(1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)z$

$=\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)z$

原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転

(2) $-iz$

$=\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}z$

原点を中心に $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転

13

$z=4-2i$ とする。点 $z$ を原点を中心として次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(1) $\frac{\pi}{6}$

$\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)(4-2i)$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(4-2i)$

$=2\sqrt{3}+1+(2-\sqrt{3})i$

$=\underline{(1+2\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})i}$

(2) $\frac{2}{3}\pi$

$\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)(4-2i)$

$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i)$

$=-2-\sqrt{3}i^2+i+2\sqrt{3}i$

$=\underline{(\sqrt{3}-2)+(2\sqrt{3}+1)i}$

(3) $-\frac{\pi}{2}$

$\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}(4-2i)$

$=-i(4-2i)$

$=-4i-2$

$=\underline{-2-4i}$

(4) $-\frac{\pi}{3}$

$\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(4-2i)$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i)$

$=(2-\sqrt{3})-i-2\sqrt{3}i$

$=\underline{(2-\sqrt{3})-(1+2\sqrt{3})i}$

14 【点 $\alpha$ を中心して回転した点を表す複素数】

$\alpha=1+i$, $\beta=5+3i$ とする。点 $\beta$ を点 $\alpha$ を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 $\gamma$ を求めよ。

$\gamma-\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)(\beta-\alpha)$

$\gamma-\alpha=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(4+2i)$

$\gamma=(2\sqrt{3}-1)+(2+\sqrt{3})i+1+i$

$=\underline{2\sqrt{3}+(3+\sqrt{3})i}$

15 【ド・モアブルの定理】

次の式を計算せよ。

(1) $(1+\sqrt{3}i)^5$

$(1+\sqrt{3}i)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$(1+\sqrt{3}i)^5=32\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$

$=32\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\underline{16-16\sqrt{3}i}$

(2) $(1+i)^8$

$(1+i)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$(1+i)^8=16(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$

$=\underline{16}$

(3) $(1-\sqrt{3}i)^{-6}$

$(1-\sqrt{3}i)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$(1-\sqrt{3}i)^{-6}=\frac{1}{64}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$

$=\underline{\frac{1}{64}}$

16 【1 の $n$ 乗根】

1 の 6 乗根を求めよ。

$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\quad(k=0,1,2,\ldots n-1)$

$z_k=\cos\frac{1}{3}k\pi+i\sin\frac{1}{3}k\pi\quad(k=0,1,2,3,4,5)$

$z_0=1\qquad z_3=-1$

$z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\qquad z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\qquad z_5=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

17 【複素数 $\alpha$ の $n$ 乗根】

次の方程式を解け。

(1) $z^2=i$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$r^2=1\qquad 2\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k:整数)$

$r=1\ (r>0)\qquad \theta=\frac{\pi}{4}+k\pi$

$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi\quad(0\leqq\theta<2\pi)$

$\therefore\ \underline{z=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i}$

(2) $z^4=-4$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=4(\cos\pi+i\sin\pi)$

$r^4=4\qquad 4\theta=\pi+2k\pi\ (k:整数)$

$r=\sqrt{2}\ (r>0)\qquad \theta=\frac{\pi}{4}+\frac{k}{2}\pi=\frac{1+2k}{4}\pi$

$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

$\therefore\ \underline{z=1+i,\ -1+i,\ -1-i,\ 1-i}$

(3) $z^2=1+\sqrt{3}i$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$r^2=2$

$r=\sqrt{2}\quad(r>0)$

$2\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ($k$：整数)

$\theta=\frac{\pi}{6}+k\pi$

$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi\quad(0\leqq\theta<2\pi)$

$\therefore\ z=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right),\ \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}{2},\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2}$

18 【線分の内分点，外分点】

A$(1+5i)$，B$(7-i)$ とする。次の点を表す複素数を求めよ。

$\alpha$ $\beta$

(1) 線分 AB を $1:2$ の比に内分する点

$\frac{2\alpha+\beta}{1+2}=\frac{2+10i+7-i}{3}$

$=\frac{9+9i}{3}$

$=3+3i$

(2) 線分 AB を $3:2$ の比に外分する点

$\frac{-2\alpha+3\beta}{3-1}=-2-10i+21-3i$

$=19-13i$

(3) 線分 AB の中点

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{8+4i}{2}$

$=4+2i$

19 【三角形の重心】

複素数平面上の3点 A$(-1+4i)$，B$(3+2i)$，C$(4-3i)$ を頂点とする △ABC の重心を表す複素数を求めよ。

$\alpha$ $\beta$ $\gamma$

$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\frac{(-1+4i)+(3+2i)+(4-3i)}{3}$

$=\frac{6+3i}{3}=2+i$

20 【方程式の表す図形】

次の方程式を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

(1) $|z|=2$

中心 原点
半径 2 の円

(2) $|z-i|=1$

中心 $i$
半径 1 の円

(3) $|z+1|=1$

中心 $-1$
半径 1 の円

(4) $(z-1)(\overline{z}-1)=4$

$|z-1|^2=4$

$|z-1|=2$

中心 1
半径 2 の円

(4) $|z|=|z+1|$

原点，$-1$ を結ぶ
垂直二等分線

(4) $|z-2|=|z-4i|$

2，$4i$ を結ぶ
垂直二等分線

21

方程式 $2|z-3|=|z|$ を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

両辺2乗

$4|z-3|^2=|z|^2$

$4(z-3)(\overline{z}-3)=z\overline{z}$

$4(z\overline{z}-3z-3\overline{z}+9)=z\overline{z}$

$3z\overline{z}-12z-12\overline{z}+36=0$

$z\overline{z}-4z-4\overline{z}+12=0$

$(z-4)(\overline{z}-4)=4$

$|z-4|^2=4$

$|z-4|=2$

$\therefore$ 中心 4
半径 2 の円

22 【条件を満たす点が描く図形】

$w=i(z-2)$ とする。点 $z$ が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，点 $w$ はどのような図形を描くか。

$|z|=1$

$w=iz-2i$

$iz=w+2i$

$z=\frac{w+2i}{i}$

$|z|=\left|\frac{w+2i}{i}\right|=\frac{|w+2i|}{|i|}=|w+2i|$

$|z|=1$ より $|w+2i|=1$

中心 $-2i$
半径 1 の円

23

$w=\frac{z+2}{z-3}$ とする。点 $z$ が原点 O を中心とする半径 2 の円上を動くとき，点 $w$ はどのような図形を描くか。

$|z|=2$

$w(z-3)=z+2$

$(w-1)z=3w+2$

$z=\frac{3w+2}{w-1}$

$|z|=\left|\frac{3w+2}{w-1}\right|=2$

$|3w+2|=2|w-1|$

両辺2乗

$|3w+2|^2=4|w-1|^2$

$|3w+2||3\overline{w}+2|=4|w-1||\overline{w}-1|$

$9w\overline{w}+6w+6\overline{w}+4=4(w\overline{w}-\overline{w}-w+1)$

$5w\overline{w}+10w+10\overline{w}=0$

$w\overline{w}+2w+2\overline{w}=0$

$(w+2)(\overline{w}+2)=4$

$|w+2|^2=4$

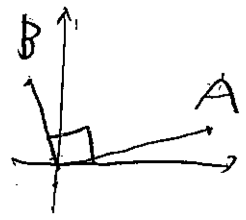
$|w+2|=2$

中心 $-2$
半径 2 の円

24 **【純虚数との積の図形的な意味】**

$\alpha=x+4i$，$\beta=-6+3i$ とする。原点 $O$ と点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$ について，$OA\perp OB$ であるような実数 $x$ の値を求めよ。

$\boxed{OA\perp OB \iff \dfrac{\alpha}{\beta}=yi\ (\text{純虚数})}$




$-6+3i = yi(x+4i)$

$-6+3i = -4y + xyi$

$\begin{cases} 2y=3 & \text{—①} \\ xy=3 & \text{—②} \end{cases}$

①②より

$x=2$

25 **【三角形の角の大きさ】**

3点 $A(1-i)$，$B(2+i)$，$C(2i)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について，$\angle BAC$ の大きさを求めよ。

$\alpha \quad \beta \quad \gamma$

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \dfrac{2i-(1-i)}{2+i-(1-i)} = \dfrac{-1+3i}{1+2i}$

$= \dfrac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{5+5i}{5}$

$= 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \dfrac{\pi}{4}$

26 **【三角形の形状】**

3点 $A(-1+i)$，$B(1-i)$，$C(-\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$ を頂点とする $\triangle ABC$ はどのような三角形か。

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \dfrac{(-\sqrt{3}-\sqrt{3}i)-(-1+i)}{(1-i)-(-1+i)} = \dfrac{(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})i}{2(1-i)}$

$= \dfrac{\{(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})i\}(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \dfrac{2-2\sqrt{3}i}{4}$

$= \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

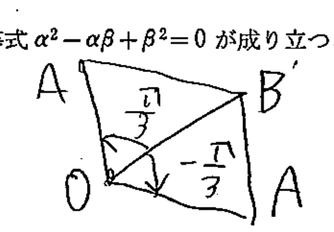
$\therefore \angle BAC = \dfrac{\pi}{3}$　　$|\gamma-\alpha| = |\beta-\alpha|$

$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = \left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$　　$AC=AB$

よって，正三角形

27

複素数平面上の異なる3点 $O(0)$，$A(\alpha)$，$B(\beta)$ について，等式 $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0$ が成り立つとき，$\triangle OAB$ は正三角形となることを証明せよ。




$\beta\neq0$ より $\beta^2$ で割ると

$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-\dfrac{\alpha}{\beta}+1=0$

$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha = \left[\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right]\beta$

$\alpha = \left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)\beta$

よって 点Aは 点Bを $-\dfrac{\pi}{3}$ または $\dfrac{\pi}{3}$ 回転させた点 なので $\triangle OAB$ は正三角形

28 **【$\alpha^n$ が実数となる $n$】**

$\alpha=-\sqrt{3}-i$ とする。$\alpha^n$ が実数となるような最小の正の整数 $n$ を求めよ。

$\alpha = 2\left(\cos\dfrac{7}{6}\pi+i\sin\dfrac{7}{6}\pi\right)$

$\alpha^n = 2^n\left(\cos\dfrac{7n}{6}\pi+i\sin\dfrac{7n}{6}\pi\right)$

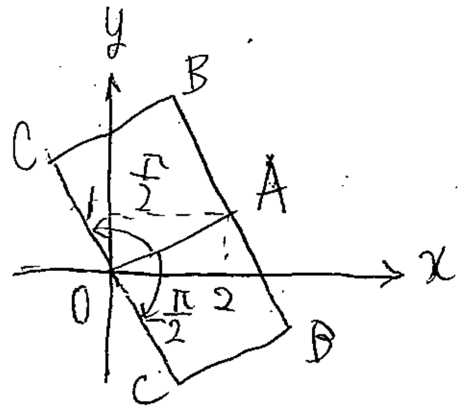
実数となるには 0

$\sin\dfrac{7n}{6}\pi=0$

$\therefore$ 最小の正の整数は $n=6$

29 **【正方形の頂点を表す複素数】**

$\alpha=2+i$ とする。複素数平面上で，原点 O と点 $A(\alpha)$ を結ぶ線分 OA を1辺とする正方形 OABC を作る。$B(\beta)$，$C(\gamma)$ を頂点とする複素数 $\beta$，$\gamma$ を求めよ。




下の正方形OABC

$\gamma = \left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}(2+i)$

$= 1-2i$

$\beta = \alpha+\gamma$

$= 3-i$

上の正方形OABC

$\gamma = \left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)(2+i)$

$= i(2+i)$

$= -1+2i$

$\beta = \alpha+\gamma$

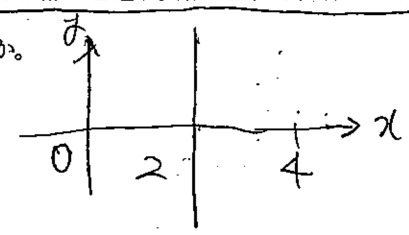
$= 1+3i$

$\beta=1+3i$ のとき $\gamma=-1+2i$

$\beta=3-i$ のとき $\gamma=1-2i$

30 **【$w=\dfrac{1}{z}$ が描く図形】**

点 $z$ が点2を通り実軸に垂直な直線上を動くとき，$w=\dfrac{1}{z}$ で表される点 $w$ は，どのような図形を描くか。




原点，点4の垂直二等分線

$|z|=|z-4|$ —①

$w=\dfrac{1}{z}$

$z=\dfrac{1}{w}$ —②

②を①に代入

$\left|\dfrac{1}{w}\right| = \left|\dfrac{1}{w}-4\right|$

$\dfrac{1}{|w|} = \dfrac{|1-4w|}{|w|}$

$w\neq0$ より

$|4w-1|=1$

$4\left|w-\dfrac{1}{4}\right|=1$

$\left|w-\dfrac{1}{4}\right|=\dfrac{1}{4}$

中心 $\dfrac{1}{4}$ 半径 $\dfrac{1}{4}$ の円