

合同式

1 【合同式の性質】

次の合同式を解け。

(1) $x+4 \equiv 2 \pmod{6}$

$x \equiv -2 \pmod{6}$

$x \equiv 4 \pmod{6}$

(2) $x-7 \equiv 6 \pmod{7}$

$x \equiv 13 \pmod{7}$

$x \equiv 6 \pmod{7}$

(3) $3x \equiv 4 \pmod{5}$

$6x \equiv 8 \pmod{5}$

$x \equiv 3 \pmod{5}$

(4) $4x \equiv 5 \pmod{11}$

$12x \equiv 15 \pmod{11}$

$x \equiv 4 \pmod{11}$

(5) $6x \equiv 3 \pmod{9}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$6x$	0	6	3	0	6	3	0	6	3

$x \equiv 2, 5, 8$

2 【合同式の利用】

合同式を利用して、次のものを求めよ。

(1) 13^{100} を 9 で割った余り

$13 \equiv 4 \pmod{9}$

$13^{100} \equiv 4^{100} \pmod{9}$

$4^{100} = (4^3)^{33} \cdot 4$

$(4^3)^{33} \cdot 4 \equiv 4 \pmod{9}$

4^1	4^2	4^3
4	7	1

(2) 2000^{2000} を 12 で割った余り

$2000 \equiv 8 \pmod{12}$

$2000^{2000} \equiv 8^{2000} \pmod{12}$

$8^{2000} \equiv 4 \pmod{12}$

8	8^2	8^3	8^4	8^5
8	4	8	4	8

(2) 47^{2011} の一の位の数

10 で割った余り

$47 \equiv 7 \pmod{10}$

$47^{2011} \equiv 7^{2011} \pmod{10}$

$7^{2011} = (7^4)^{502} \cdot 7^3$

$7^{2011} \equiv 1 \cdot 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$

7	7^2	7^3	7^4
7	9	3	1

$4 \overline{) 2011}$
502
20
11
8
3

3 【合同式を利用した証明】

(1) n が自然数のとき、 n^3+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。

(a) $n \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$n^3+1 \equiv 2 \pmod{3}$

(b) $n \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$n^3+1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod{3}$

(2) n が自然数のとき、 n^6+1 は 3 で割り切れないことを証明せよ。

(a) $n \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$n^6+1 \equiv 2 \pmod{3}$

(b) $n \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$n^6+1 \equiv 2 \pmod{3}$

(c) $n \equiv 0 \pmod{3}$ のとき

$n^3+1 \equiv 1 \pmod{3}$

$n \equiv 2 \pmod{3}$

$n \equiv 2 \pmod{3}$

(c) $n \equiv 0 \pmod{3}$ のとき

$n^6+1 \equiv 1 \pmod{3}$

n^6+1 は 3 で割り切れない

4

a, b は 3 で割り切れない整数とする。このとき、 $a^4+a^2b^2+b^4$ は 3 で割り切れることを証明せよ。

(a) $a \equiv 1, b \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$1+1+1 \equiv 3 \equiv 0$

(b) $a \equiv 2, b \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$1+1+1 \equiv 0$

(c) $a \equiv 1, b \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$1+1+1 \equiv 3 \equiv 0$

(d) $a \equiv 2, b \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$1+1+1 \equiv 0$

$a^4+a^2b^2+b^4$ は 3 で割り切れる

5

n は奇数とする。このとき、次のことを証明せよ。

(1) n^2-1 は 8 の倍数である。

$n \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod{8}$

n	1	3	5	7
n^2	1	1	1	1
n^2-1	0	0	0	0

n^2-1 は 8 の倍数 (n : 奇数)

(2) n^5-n は 3 の倍数である。

$n \equiv 0, 1, 2$

n	0	1	2
n^5	0	1	2
n^5-n	0	0	0

n^5-n は 3 の倍数 (n : 奇数)

(3) n^5-n は 120 の倍数である。

$n^5-n = n(n^4-1) = n(n^2+1)(n^2-1)$

(1) は 8 の倍数

(2) は 3 の倍数

n^5-n が 5 の倍数を示せばよい

n	0	1	2	3	4
n^5	0	1	2	3	4
n^5-n	0	0	0	0	0

n^5-n は 120 の倍数 (n : 奇数)