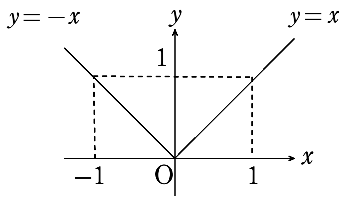
微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

微分可能と連続

反例

$f(x)=|x|$



導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

積の微分

$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$$

$$(f\cdot g\cdot h)'=f'\cdot g\cdot h+f\cdot g'\cdot h+f\cdot g\cdot h'$$

例

(1) $y=x\sin x$

$y'=\sin x+x\cos x$

(2) $y=(x+2)(x-1)(x-5)$

$y'=(x-1)(x-5)+(x+2)(x-5)+(x+2)(x-1)$

$=x^2-6x+5+x^2-3x-10+x^2+x-2$

$=3x^2-8x-7$

商の微分

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2} \qquad \text{とくに} \qquad \left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2}$$

例

(1) $y=\dfrac{x^2}{x+3}$

$y'=\dfrac{2x(x+3)-x^2}{(x+3)^2}$

$=\dfrac{x^2+6x}{(x+2)^2}$

(2) $y=\dfrac{1}{2x-3}$

$y'=-\dfrac{2}{(2x-3)^2}$

合成関数の微分

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))\,g'(x)$$

例

$y'=(4-3x)^5$

$y'=5(4-3x)^4(4-3x)'$

$=-15(4-3x)^4$

三角関数の導関数

$$(\sin x)'=\cos x$$

$$(\cos x)'=-\sin x$$

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

対数関数の導関数

$$(\log x)'=\frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\log a}$$

指数関数の導関数

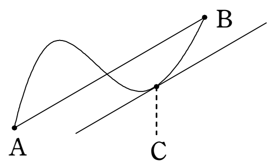
$$(e^x)'=e^x$$

$$(a^x)'=a^x\log a$$

平均値の定理

$f(x)$ が $a<x<b$ で微分可能のとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad (a<c<b)$$



を満たす c が存在(少なくとも1つは存在)

例

$f(x)=x^2$ は $-1<x<2$ で微分可能

$\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c) \quad (a<c<b)$ を満たす c が存在

e の極限

① $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

② $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

③ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$

④ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$