x^α の積分

$$\int \frac{1}{x}dx=\log|x|+C$$

$$\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$$

$$\int \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$$

三角関数の積分

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$$

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{\tan x}+C$$

三角関数の相互関係

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1+\frac{1}{\tan^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}$$

倍角

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

3倍角

$$\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$$

$$\cos^3 x=\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x)$$

積 → 和

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

和 → 積

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

指数関数の積分

$$\int e^x dx=e^x+C$$

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$$

対数関数の積分

$$\int \log x\,dx=x\log x-x+C$$

分数関数の積分

①（分子の次数）≧（分母の次数）のとき，分子の次数を下げる（分子 ÷ 分母をする）

② 分母が $(ax+b)^n$ なら， $ax+b=t$ とおく

③ 分母が因数分解できるとき，部分分数分解

$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ の積分

> $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ は $x=a\sin\theta$ とおく

例

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$x=2\sin\theta$ とおく

$$x=2\sin\theta$$
$$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$$
$$dx=2\cos\theta d\theta$$

θ	0	$\to$	1
x	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}dx=\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2\theta}}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos\theta}\cdot 2\cos\theta d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$
$$=\frac{\pi}{2}$$

$\dfrac{1}{x^2+a^2}$ の積分

> $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ は $x=a\tan\theta$ とおく

例

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{3+x^2}dx$$

$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおく

$$x=\sqrt{3}\tan\theta$$
$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$$
$$dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$\int_0^1 \frac{1}{3+3\tan^2\theta}dx=\int_0^1 \frac{1}{3(1+\tan^2\theta)}dx$$

$$\left(\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)$$

θ	-1	$\to$	1
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\to$	$\frac{\pi}{6}$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2\theta}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

$\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ の積分

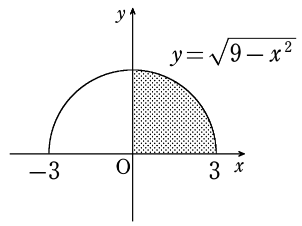
> D＞0 $\Longrightarrow$ 部分分数分解
>
> D＝0 $\Longrightarrow$ 普通に積分
>
> D＜0 $\Longrightarrow$ $\tan\theta$ とおく

$\sqrt{a^2-x^2}$ の積分

> $\sqrt{a^2-x^2}$ は円で解く

例

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx$$



$$y=\sqrt{9-x^2}$$
$$x^2+y^2=9$$

よって

$$\frac{1}{4}\cdot 3^2\cdot\pi=\frac{9}{4}\pi$$

瞬間置換積分（１次式）

> $$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int F(ax+b)+C$$

$f(x)$ の x に １次式 $ax+b$ を代入した $f(ax+b)$ の形のとき使用

x の係数の逆数 $\dfrac{1}{a}$ をかけて，いつも通り積分する

例

$$\int(4x+1)^2dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}(4x+1)^3+C$$
$$=\frac{1}{12}(4x+1)^3+C$$

瞬間置換積分 $\left(\dfrac{g'}{g}\right)$

> $$\int\frac{g'}{g}dx=\log|g|+C$$

分母を微分すると分子になるとき使用

例

$$\int\frac{6x}{3x^2-5}dx=\int\frac{(3x^2-5)'}{3x^2-5}dx$$
$$=\log|3x^2-5|+C$$

瞬間置換積分（累乗）

> $$\int g'g^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}g^{\alpha+1}+C$$

累乗の中を微分したものが，累乗の外にあるとき使用

$\displaystyle\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ と同じように積分

例

(1) $$\int x(x^2+1)^5dx=\frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^5dx$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}(x^2+1)^6+C$$
$$=\frac{1}{12}(x^2+1)^6+C$$

(2) $$\int\sin^3x\cos x\,dx=\frac{1}{4}\sin^4x+C$$

$\dfrac{1}{\sin x}$，$\dfrac{1}{\cos x}$ の積分

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x}{\sin^2 x}$$
$$\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos^2 x}$$
に変形

例

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx$$
$$=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$

$\sin x=t$ とおく

$$\frac{dx}{dt}\cos x=1$$
$$dx=\frac{1}{\cos x}dt$$

$$=\int\frac{1}{1-t^2}dt$$
$$=\int\frac{1}{(1-t)(1+t)}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}(-\log|1-t|+\log|1+t|)+C$$
$$\boxed{\frac{1}{(1-t)'}=\frac{1}{-1}=-1}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C$$

部分積分法

$$\int f\,g'\,dx=f\,g-\int f'g\,dx$$

① 積分する関数が積の形
② f が微分すると簡単になる
③ f にする方

$\boxed{\begin{array}{c}\text{対数関数}\\ \log x\end{array}} > \boxed{\begin{array}{c}\text{多項式}\\ x^n\end{array}} > \boxed{\begin{array}{c}\text{三角関数}\\ \sin x\end{array}} > \boxed{\begin{array}{c}\text{指数関数}\\ e^x\end{array}}$

例

(1) $\displaystyle\int xe^x dx=\int x(e^x)'dx=xe^x-\int 1\cdot e^x dx$
$$=xe^x-e^x+C$$

(2) $\displaystyle\int\log 2x\,dx=\int 1\cdot\log 2x\,dx=\int(x)'\log 2x\,dx$
$$=x\log 2x-\int x\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2\,dx$$
$$=x\log 2x-x+C$$

瞬間部分積分

そのまま　微分　微分　微分

$$\int f\cdot g\,dx=f\cdot g-f\cdot g+f\cdot g-f\cdot g+\cdots$$

積分　積分　積分

注　① 対数関数には使えない
② $e^x\sin x$，$e^x\cos x$ のような同形出現型には使えない

例

$$\int x^2\sin x\,dx=x^2\cos x+2\sin x+2\cos x+C$$

	f	g
$+$	x^2	$\cos x$
$-$	$2x$	$-\sin x$
$+$	2	$\cos x$

ウォリスの公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & (n：偶数)\\ 1 & (n：奇数)\end{cases}$$

例

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}$

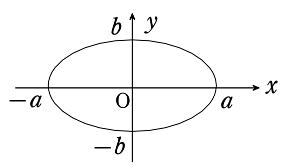
(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\,dx=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{16}{35}$

区分求積法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

楕円の面積

$S=\pi ab$



体積

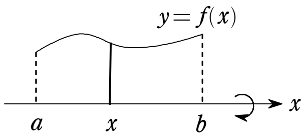
$$V=\int_a^b \underbrace{S(x)}_{\text{断面積}}\,dx$$

積分法④（公式）

回転体の体積

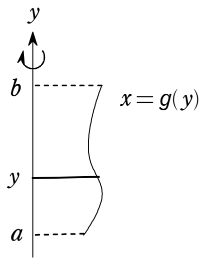
$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx$$

$$=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx$$



$$V=\pi\int_a^b x^2\,dy$$

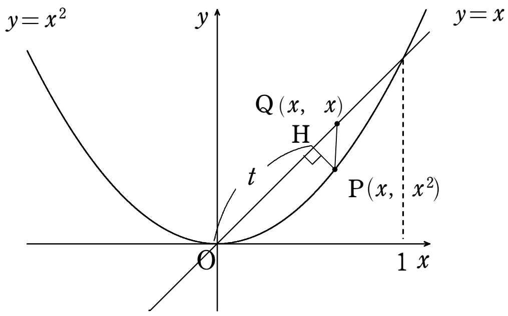
$$=\pi\int_a^b f(y)^2\,dy$$



斜軸回転体の体積

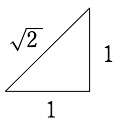
$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$ で囲まれる部分を $y=x$ のまわりに 1 回転してできる

回転体の体積 V



① P$(x,\ x^2)$
② 垂線の足 H　　とおく
③ Q$(x,\ x)$
④ OH$=t$

$$\mathrm{V}=\int_0^{\sqrt{2}}\pi PH^2dt$$



・回転の中心軸を t 軸として，t で積分

・t 軸に垂直な断面積を考えると断面積は円である

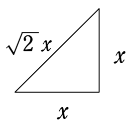
・PH と OH を x で示す

$$\mathrm{PH}=\frac{|x-x^2|}{\sqrt{2}}\quad（点と直線）$$

$$=\frac{x-x^2}{2}\quad（\because\ 0\leqq x\leqq 1）$$

$$\mathrm{OH}=\mathrm{OQ}-\mathrm{QH}=\sqrt{2}\,x-\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{x+x^2}{\sqrt{2}}$$



よって

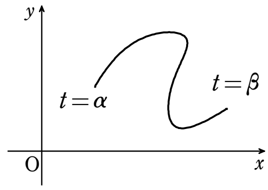
$$t=\frac{x+x^2}{\sqrt{2}}$$

曲線の長さ（媒介変数表示）

曲線　$\begin{matrix} x=f(t) \\ y=g(t) \end{matrix}$　$(\alpha\leqq t\leqq\beta)$　の長さ L

$$\mathrm{L}=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt$$

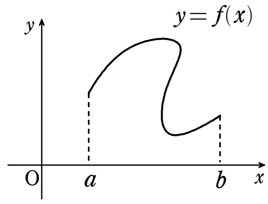


曲線の長さ（ $y=f(x)$ ）

曲線　$y=f(x)$　$(a\leqq t\leqq b)$　の長さ L

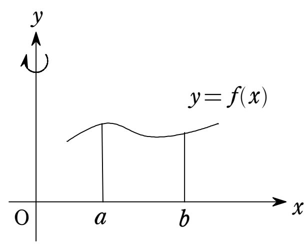
$$\mathrm{L}=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$



バウムクーヘン積分

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$



注

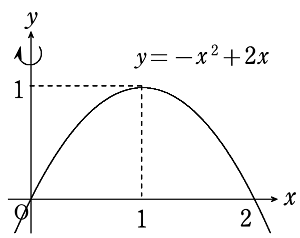
$\dfrac{\varDelta V}{\varDelta x}\fallingdotseq 2\pi xy$

$\varDelta x\to 0$ のとき

両辺の差は 0 に近づくので

という常套句必要

例



$\dfrac{\varDelta V}{\varDelta x}\fallingdotseq 2\pi xy$

$\varDelta x\to 0$ のとき

両辺の差は 0 に近づくので

$$\mathrm{V}=2\pi\int_0^2 xf(x)dx$$

$$=2\pi\int_0^2(-x^3+2x^2)dx$$

$$=\frac{8}{3}\pi$$