

複素数平面① (公式)

共役な複素数

- ① $z + \bar{z}$, $z\bar{z}$ は実数
- ② $\overline{\bar{z}} = z$
- ③ $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ (和) $\overline{\alpha - \beta} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}$ (差)
- $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$ (積) $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ (商)
- $\overline{\alpha^n} = (\bar{\alpha})^n$ (累乗)

複素数の実数条件・純虚数条件

- z が実数 \Rightarrow $z = \bar{z}$ (頻出)
- z が純虚数 \Rightarrow $z \neq 0$, $z = -\bar{z}$

絶対値

- ① $z = a + bi$ のとき $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- ② (i) $|z| = 0 \iff z = 0$
- (ii) $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$
- (iii) $|z|^2 = z\bar{z}$ (頻出)
- $|z|^2 = z\bar{z} \iff z\bar{z} = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$
- (iv) $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$, $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$
- ③ 2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ の距離は $AB = |\beta - \alpha|$

例

$A(2+3i)$, $B(1+6i)$ の距離は
 $|(1+6i) - (2+3i)| = |-1+3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

実数倍

3点 $0, \alpha, \beta$ が一直線上 $\iff \beta = k\alpha$ (k は実数)

内分・外分

2点 α, β を $m:n$ に内分 $\frac{n\alpha + m\beta}{m+n}$

2点 α, β を $m:n$ に外分 $\frac{-n\alpha + m\beta}{m-n}$

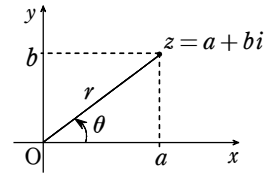
重心

3点 α, β, γ の重心 $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$

極形式

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

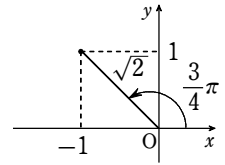
$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



例

$z = -1 + i$ のとき

$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$



積の極形式

$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ のとき

$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$

例

$\alpha = \sqrt{3} + i$, $\beta = -1 + \sqrt{3}i$ のときの $\alpha\beta$ を極形式で表すと

$\alpha = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$, $\beta = 2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)$

$\alpha\beta = 4 \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi \right) \right\}$
 $= 4 \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right)$

積の極形式の図形的意味

点 $r(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot z$ は、点 z を原点を中心に θ だけ回転させて、長さを r 倍した点

例

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $\alpha = \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ のとき

$az = 2r \left\{ \cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \right\}$

点 az は、点 z を原点を中心に $\frac{\pi}{6}$ 回転させて、長さを 2 倍にした点

商の極形式

$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ のとき

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \}$

例

$\alpha = 2 + 2i$, $\beta = \sqrt{3} + i$ のときの $\frac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表すと

$\alpha = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, $\beta = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{2} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right\}$
 $= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$

複素数平面② (公式)

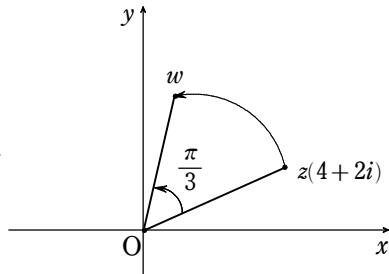
原点 O を中心とする回転移動

原点 O を中心として点 z を反時計回りに θ 回転移動させた点 w は
 $w = (\cos \theta + i \sin \theta)z$

例

点 $z = 4 + 2i$ を、原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点 w

$$\begin{aligned} w &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) z \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (4 + 2i) \\ &= (2 - \sqrt{3}) + (1 + 2\sqrt{3})i \end{aligned}$$



点 α を中心とする回転移動

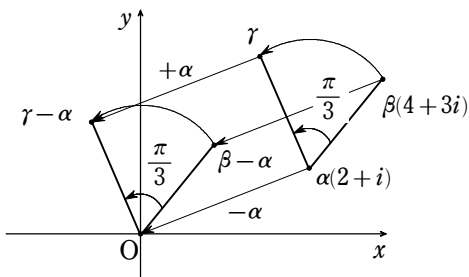
点 α を中心として点 β を反時計回りに θ 回転移動させた点 γ は
 $\gamma - \alpha = (\cos \theta + i \sin \theta)(\beta - \alpha)$

γ, β をそれぞれ $-\alpha$ 平行移動して、原点を中心に θ 回転移動する

例

点 $\beta = 4 + 3i$ を、点 $\alpha = 2 + i$ を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点 γ

$$\begin{aligned} \gamma - \alpha &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (\beta - \alpha) \\ \gamma - (2 + i) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (4 + 3i - (2 + i)) \\ \gamma &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (2 - 2i) + (2 + i) \\ &= (3 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})i \end{aligned}$$



ド・モアブルの定理

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (n : \text{整数})$$

例

$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ のとき

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + i)^6 &= 2^6 \left\{ \cos \left(6 \times \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(6 \times \frac{\pi}{6} \right) \right\} \\ &= 64(\cos \pi + i \sin \pi) \\ &= -64 \end{aligned}$$

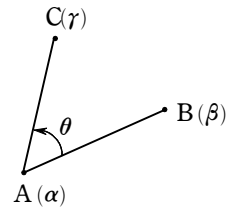
1 の n 乗根

$$z_k = \cos \left(\frac{2\pi}{n} \times k \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{n} \times k \right) \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

1 の n 乗根とは、 $z^n = 1$ の解で、これらを表す点は、原点を中心とする半径 1 の円周上にあり、正 n 角形の頂点である

2 直線のなす角

$\angle BAC$ は $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ を極形式で表せばわかる



方程式の表す図形

2 点 $A(\alpha), B(\beta)$ に対して

$|z - \alpha| = |z - \beta| \implies$ 線分 AB の垂直二等分線

$|z - \alpha| = r \implies$ 点 α を中心とする半径 r の円

アポロニウスの円

$$n|z - \alpha| = m|z - \beta|$$

$A(\alpha), B(\beta)$ を

$m : n$ に内分する点 C

$m : n$ に外分する点 D とすると

直径 CD の円

注 $m = n$ のとき AB の垂直二等分線

例

方程式 $2|z - i| = |z + 2i|$ を満たす点 z の全体はどのような図形か。

$A(i), B(-2i)$ とすると

AB を 1 : 2 に内分する点 C $\frac{2i + 1(-2i)}{1 + 2} = 0$

AB を 1 : 2 に外分する点 D $\frac{-2i + 1(-2i)}{1 - 2} = \frac{-4i}{-1} = 4i$

直径 CD の円

複素数平面の解法

	解法	メリット	デメリット
①	z のまま	計算量 少	z の慣れが必要
②	極形式	回転, n 乗	三角関数の計算
③	図形	計算量 少	図形の慣れが必要
④	$z = x + yi$	万能	計算量 多
⑤	ベクトル	ベクトルで解ける	問題が少ない