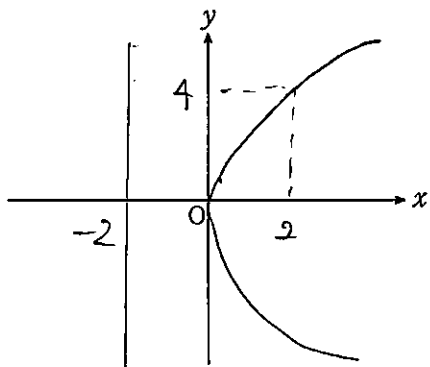


式と曲線①

1 【放物線】

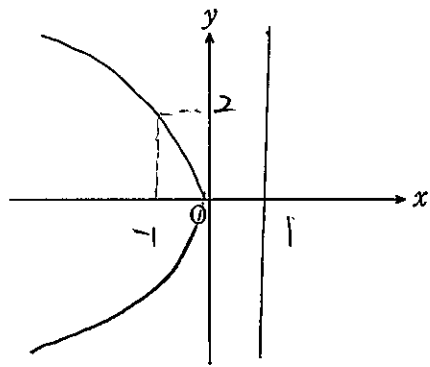
次の放物線の概形をかけ。また、その焦点と準線を求めよ。

(1) $y^2=8x$ $y^2=4 \cdot 2x$ (2) $y^2=-4x$ $y^2=4(-1)x$



焦点 (2, 0)

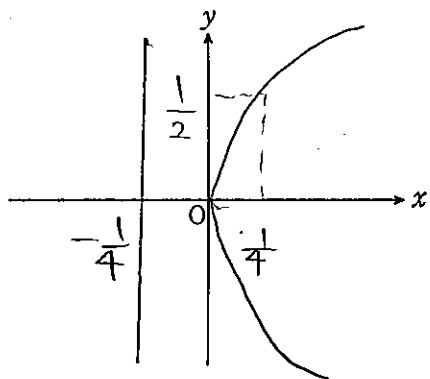
準線 $x = -2$



焦点 (-1, 0)

準線 $x = 1$

(3) $y^2=x$ $y^2=4(\frac{1}{4})x$



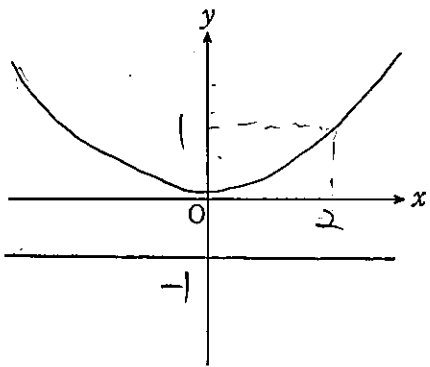
焦点 ($\frac{1}{4}$, 0)

準線 $x = -\frac{1}{4}$

2

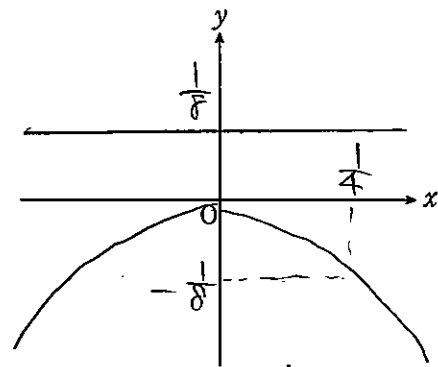
次の放物線の概形をかけ。また、その焦点と準線を求めよ。

(1) $x^2=4y$ (2) $y=-2x^2$ $x^2=-\frac{1}{2}y$ $x^2=4(-\frac{1}{8})y$



焦点 (0, 1)

準線 $y = -1$



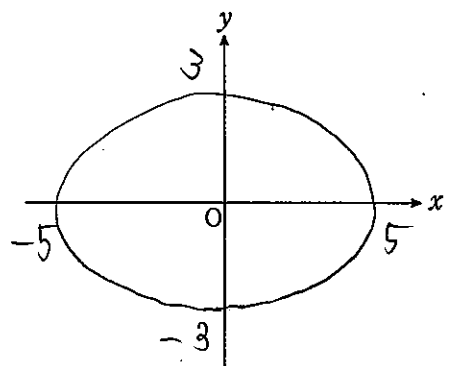
焦点 (0, $-\frac{1}{8}$)

準線 $y = \frac{1}{8}$

3 【楕円】

次の楕円の概形をかけ。また、その焦点の座標、長軸の長さ、短軸の長さを求めよ。

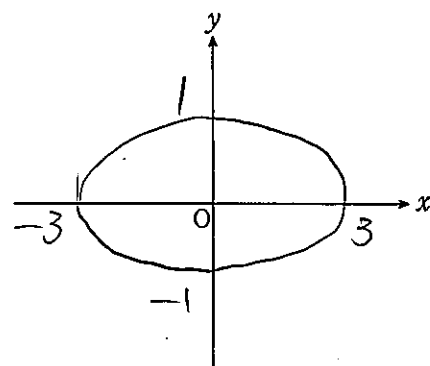
(1) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ $\sqrt{25-9} = 4$ (2) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ $\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$



焦点 (4, 0) (-4, 0)

長軸の長さ 10

短軸の長さ 6

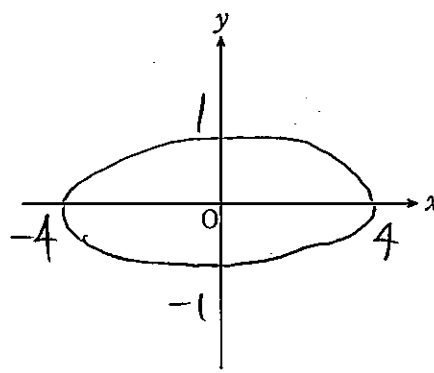


焦点 ($2\sqrt{2}$, 0) ($-2\sqrt{2}$, 0)

長軸の長さ 6

短軸の長さ 2

(3) $x^2+16y^2=16$ $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$ $\sqrt{16-1} = \sqrt{15}$



焦点 ($\sqrt{15}$, 0) ($-\sqrt{15}$, 0)

長軸の長さ 8

短軸の長さ 2

4

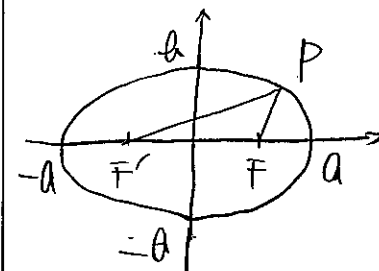
次の楕円の方程式を求めよ。

(1) 焦点が点 (-2, 0) で、準線が直線 $x=2$

$y^2 = 4(-2)x$

$y^2 = -8x$

(2) 2点 ($\sqrt{3}$, 0), ($-\sqrt{3}$, 0) を焦点とし、焦点からの距離の和が 4



$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 & \text{(焦点)} \\ 2a = 4 & \text{(距離の和)} \end{cases}$

$a = 2, b = 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(3) 2点 (2, 0), (-2, 0) を焦点とし、長軸の長さが 6

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 & \text{(焦点)} \\ 2a = 6 & \text{(長軸)} \end{cases}$

$a = 3, b = \sqrt{5}$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

5

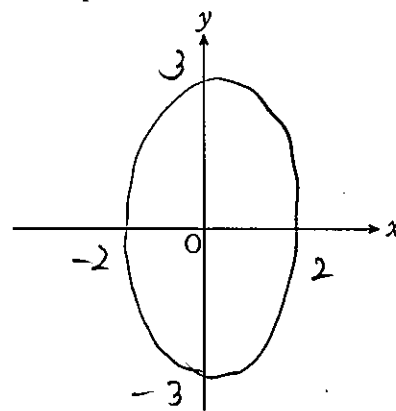
次の楕円の概形をかけ。また、その焦点の座標、長軸の長さ、短軸の長さを求めよ。

(1) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

$\sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

(2) $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$

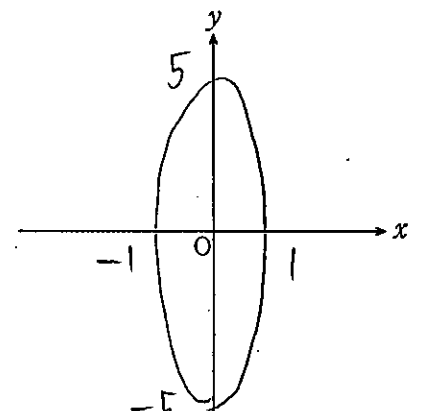
$\sqrt{25-1} = 2\sqrt{6}$



焦点 (0, $\sqrt{5}$) (0, $-\sqrt{5}$)

長軸の長さ 6

短軸の長さ 4



焦点 (0, $2\sqrt{6}$) (0, $-2\sqrt{6}$)

長軸の長さ 2

短軸の長さ 10

式と曲線②

6

円 $x^2 + y^2 = 2^2$ を、次のように拡大または縮小して得られる楕円の方程式を求めよ。

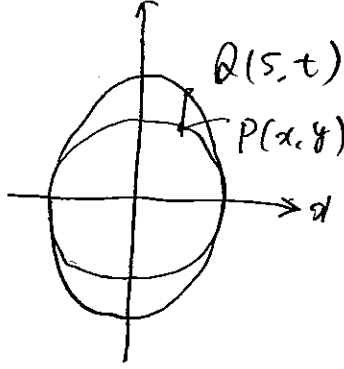
(1) x 軸をもとにして y 軸方向に $\frac{3}{2}$ 倍

$$\begin{cases} x = s \\ y = \frac{3}{2}t \end{cases} \quad \begin{cases} s = x \\ t = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$s^2 + t^2 = 4$$

$$x^2 + \frac{4}{9}y^2 = 4$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$



(2) y 軸をもとにして x 軸方向に 2 倍

$$\begin{cases} x = 2s \\ y = t \end{cases} \quad \begin{cases} s = \frac{1}{2}x \\ t = y \end{cases}$$

$$s^2 + t^2 = 4$$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 4$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

7

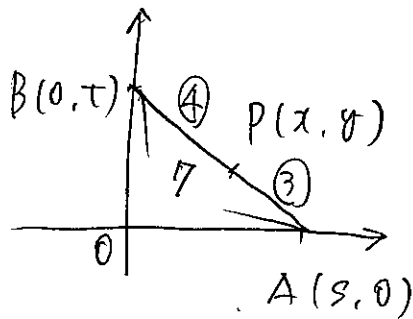
座標平面上において、長さ 7 の線分 AB の端点 A は x 軸上を、端点 B は y 軸上を動くとき、線分 AB を 3:4 に内分する点 P の軌跡を求めよ。

$$A(s, 0) \quad B(0, t) \quad P(x, y)$$

とおく。

$$AB = 7 \text{ である}$$

$$s^2 + t^2 = 49$$



$$\begin{cases} x = \frac{4}{7}s \\ y = \frac{3}{7}t \end{cases} \quad \begin{cases} s = \frac{7}{4}x \\ t = \frac{7}{3}y \end{cases}$$

$$① \quad 1 = \frac{4}{7} \lambda$$

$$\frac{49}{16}x^2 + \frac{49}{9}y^2 = 49$$

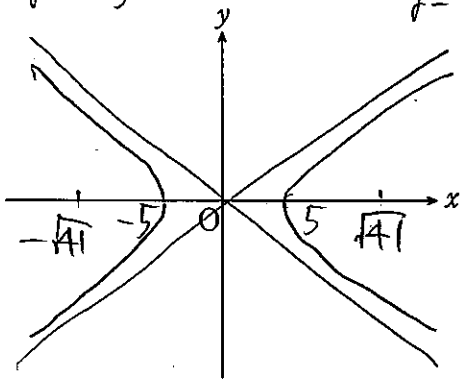
$$\text{楕円} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

8 【双曲線】

その双曲線の概形をかけ。また、その焦点、頂点、漸近線を求めよ。

(1) $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ $\sqrt{25+16} = \sqrt{41}$ (2) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$$y = -\frac{4}{5}x \quad y = \frac{4}{5}x$$

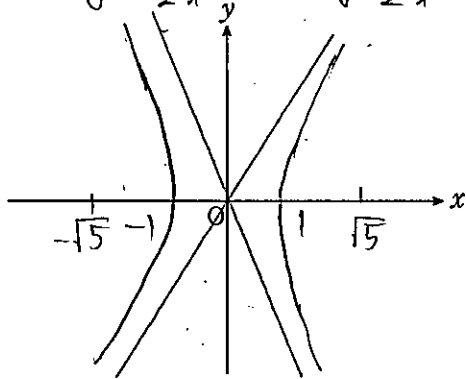


焦点 $(\sqrt{41}, 0)$ $(-\sqrt{41}, 0)$

頂点 $(5, 0)$ $(-5, 0)$

漸近線 $y = \pm \frac{4}{5}x$

$$y = -2x \quad y = 2x$$

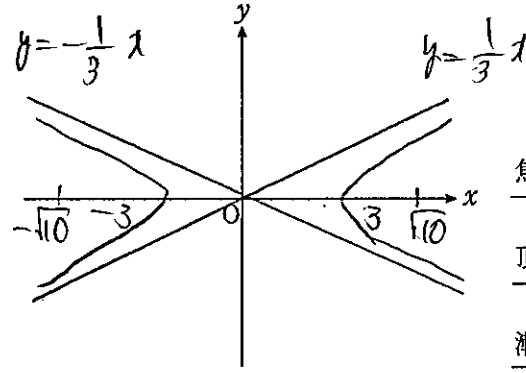


焦点 $(\sqrt{5}, 0)$ $(-\sqrt{5}, 0)$

頂点 $(1, 0)$ $(-1, 0)$

漸近線 $y = \pm 2x$

(3) $x^2 - 9y^2 = 9$



焦点 $(\sqrt{10}, 0)$ $(-\sqrt{10}, 0)$

頂点 $(3, 0)$ $(-3, 0)$

漸近線 $y = \pm \frac{1}{3}x$

9

2点 $(5, 0)$, $(-5, 0)$ を焦点とし、焦点からの距離の差が 8 である双曲線の方程式を求めよ。

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a = 4, \quad b = 3$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \text{ (焦点)} \\ 2a = 8 \text{ (距離の差)} \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

10

2点 $(2, 0)$, $(-2, 0)$ を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ。

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$a^2 + a^2 = 4 \text{ (焦点)}$$

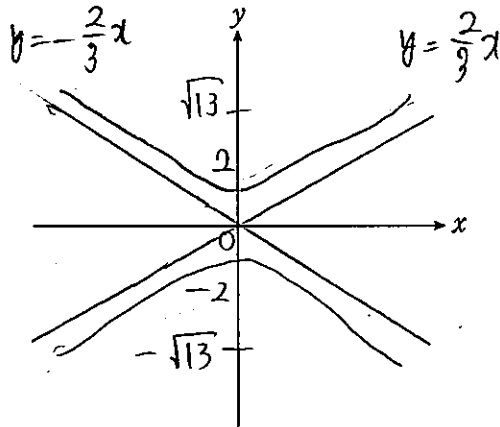
$$a = \sqrt{2}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$$

11

その双曲線の概形をかけ。また、その焦点、頂点、漸近線を求めよ。

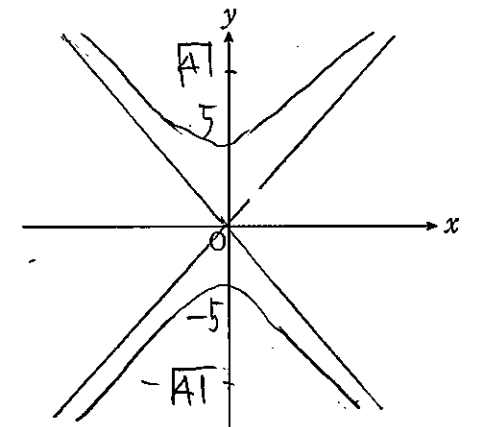
(1) $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = -1$ $\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ (2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = -1$ $\sqrt{16+25} = \sqrt{41}$



焦点 $(0, \sqrt{13})$ $(0, -\sqrt{13})$

頂点 $(0, 2)$ $(0, -2)$

漸近線 $y = \pm \frac{2}{3}x$



焦点 $(0, \sqrt{41})$ $(0, -\sqrt{41})$

頂点 $(0, 5)$ $(0, -5)$

漸近線 $y = \pm \frac{5}{4}x$

12 【平行移動】

楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を、 x 軸方向に 3、 y 軸方向に -2 だけ平行移動するとき、移動後の楕円の方程式と焦点の座標を求めよ。

方程式

$$\frac{(x-3)^2}{4} + (y+2)^2 = 1$$

焦点

$$(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$$

$$\downarrow \begin{matrix} x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow -2 \end{matrix}$$

$$(\sqrt{3}+3, -2), (-\sqrt{3}+3, -2)$$

13 放物線 $y^2=4x$ を x 軸方向に -1 , y 軸方向に 2 だけ平行移動するとき, 移動後の放物線の方程式と焦点の座標を求めよ。

方程式 $(y-2)^2=4(x+1)$ //

焦点 $x \rightarrow -1$
 $(1,0) \xrightarrow{y \rightarrow 2} (0,2)$ //

14 次の方程式はどのような図形を表すか。

(1) $x^2+4y^2+6x-8y+9=0$

$(x+3)^2-9+4(y^2-2y)+9=0$
 $\frac{(x+3)^2}{4}+(y-1)^2-1=0$

楕円 $\frac{(x+3)^2}{4}+(y-1)^2=1$ //

(2) $y^2+8y-16x=0$

$y^2+8y+16=16x+16$

放物線 $(y+4)^2=16(x+1)$ //

(3) $4x^2-9y^2-16x-36y-56=0$

$4(x^2-4x)-9(y^2+4y)=56$
 $4(x-2)^2-16-9(y+2)^2+36=56$
 $4(x-2)^2-9(y+2)^2=36$

双曲線 $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$ //

15 【2次曲線と直線】 k は定数とする。双曲線 $x^2-2y^2=4$ と直線 $y=x+k$ の共有点の個数を求めよ。

$x^2-2(x+k)^2=4$
 $x^2-2(x^2+2kx+k^2)=4$
 $x^2+4kx+2k^2+4=0$

$\frac{D}{4}=(2k)^2-(2k^2+4)$
 $=2(k^2-2)$

$\frac{D}{4} > 0 \quad k^2 > 2$
 $k < -\sqrt{2}, \sqrt{2} < k \quad a > \pm \quad 2 \square$

$\frac{D}{4} = 0 \quad k = \pm \sqrt{2} \quad a = \pm \quad 1 \square$

$\frac{D}{4} < 0 \quad -\sqrt{2} < k < \sqrt{2} \quad a < \pm \quad 0 \square$ //

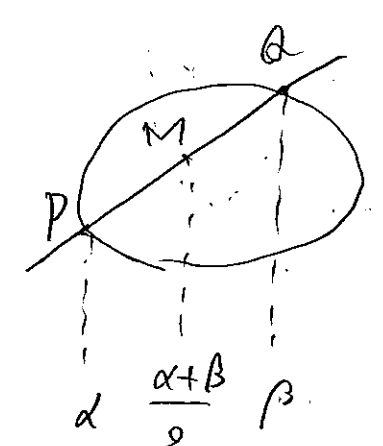
16 楕円 $x^2+4y^2=4$ と直線 $y=x+2$ の2つの交点を P, Q とするとき, 線分 PQ の中点 M の座標を求めよ。① ②

② \equiv ① に代入
 $x^2+4(x+2)^2=4$
 $x^2+4(x^2+4x+4)=4$
 $5x^2+16x+12=0$

解と係数の関係より
 $\alpha + \beta = -\frac{16}{5}$

中点 M の x 座標 $= \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{8}{5}$

② に代入
 $y = -\frac{8}{5} + 2 = \frac{2}{5}$ $M(-\frac{8}{5}, \frac{2}{5})$ //



17 【2次曲線の接線の方程式】 次の曲線上の点 P における接線の方程式を求めよ。

(1) 放物線 $y^2=4x$, $P(1, 2)$ (2) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$, $P(3, 1)$

$2y = 2(x+1)$ $\frac{3x}{12} + \frac{y}{4} = 1$
 $y = x+1$ $x+y=4$
 $y = -x+4$ //

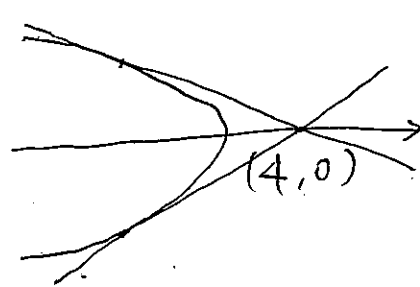
18 点 $C(4, 0)$ から放物線 $y^2=-4x$ に接線を引くとき, その接線の方程式を求めよ。また, そのときの接点の座標を求めよ。① ②

接線 $y = m(x-4)$ とおく ($m \neq 0$)

② \equiv ① に代入
 $m^2(x-4)^2 = -4x$
 $m^2(x^2-8x+16) = -4x$
 $m^2x^2 + (4-8m^2)x + 16m^2 = 0$
 $\frac{D}{4} = (2-4m^2)^2 - 16m^4 = 0$
 $4-16m^2 = 0$
 $m = \pm \frac{1}{2}$

$m = \frac{1}{2}$ a と \pm 接線 $y = \frac{1}{2}(x-4)$

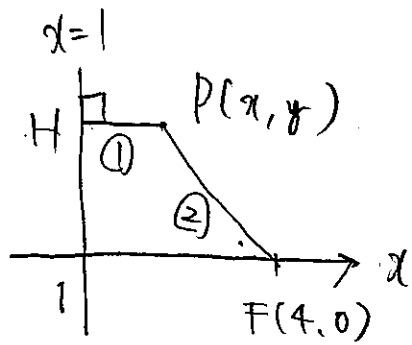
$m = -\frac{1}{2}$ a と \pm 接線 $y = -\frac{1}{2}(x-4)$ //



式と曲線④

19 【離心率】

点 F(4, 0) からの距離と、直線 x=1 からの距離の比が 2:1 である点 P の軌跡を求めよ。



$$PF = PH = 2 = 1$$

$$4PH^2 = PF^2$$

$$4(x-1)^2 = (x-4)^2 + y^2$$

$$4(x^2 - 2x + 1) = x^2 - 8x + 16 + y^2$$

$$3x^2 - y^2 = 12$$

$$\text{双曲線} \quad x^2 - \frac{y^2}{3} = 4$$

20 【媒介変数表示】

媒介変数表示される次の曲線について、t を消去して x, y の方程式を求めよ。

(1) $x = t + 1, y = t^2 + 4t$ — ②

$$t = x - 1 \quad \text{--- ①}$$

①② を y

$$y = (x-1)^2 + 4(x-1)$$

$$y = x^2 + 2x - 3$$

(2) $x = 2t, y = 2t - t^2$ — ②

$$t = \frac{1}{2}x \quad \text{--- ①}$$

①② を y

$$y = x - \frac{1}{4}x^2$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x$$

21

放物線 $y = -x^2 + 4tx + 2t$ の頂点は、t の値が変化するとき、どのような曲線を描くか。

$$y = -(x^2 - 4tx) + 2t$$

$$= -\{(x-2t)^2 - 4t^2\} + 2t$$

$$= -(x-2t)^2 + 4t^2 + 2t$$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t^2 + 2t \end{cases} \quad \text{--- ②}$$

$$t = \frac{1}{2}x \quad \text{--- ①}$$

$$t = \frac{1}{2}x \quad \text{--- ①}$$

①② を y

$$y = x^2 + x$$

22

角 θ を媒介変数として、次の楕円を表せ。

(1) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

$$x = 3 \cos \theta$$

$$y = 2 \sin \theta$$

(2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

$$x = 4 \cos \theta$$

$$y = 5 \sin \theta$$

23

θ が変化するとき、点 $P(\frac{3}{\cos \theta}, 2 \tan \theta)$ は双曲線 $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ 上を動くことを示せ。

$$x = \frac{3}{\cos \theta}, \quad y = 2 \tan \theta$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \frac{y^2}{4} = \frac{9}{9 \cos^2 \theta} - \frac{4 \tan^2 \theta}{4}$$

$$= \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= 1 = \text{--- (右辺)}$$

24

角 θ を媒介変数として、次の双曲線を表せ。

(1) $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$

$$x = \frac{5}{\cos \theta}$$

$$y = 4 \sin \theta$$

(2) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = -1$

$$x = 4 \tan \theta$$

$$y = \frac{3}{\cos \theta}$$

25

次の媒介変数表示は、どのような曲線を表すか。

(1) $x = 3 \cos \theta + 2, y = 3 \sin \theta - 1$

$$\cos \theta = \frac{x-2}{3}, \quad \sin \theta = \frac{y+1}{3}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{(y+1)^2}{9} + \frac{(x-2)^2}{9} = 1$$

$$\text{円} \quad (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

(2) $x = 3 \cos \theta + 1, y = 2 \sin \theta + 3$

$$\cos \theta = \frac{x-1}{3}, \quad \sin \theta = \frac{y-3}{2}$$

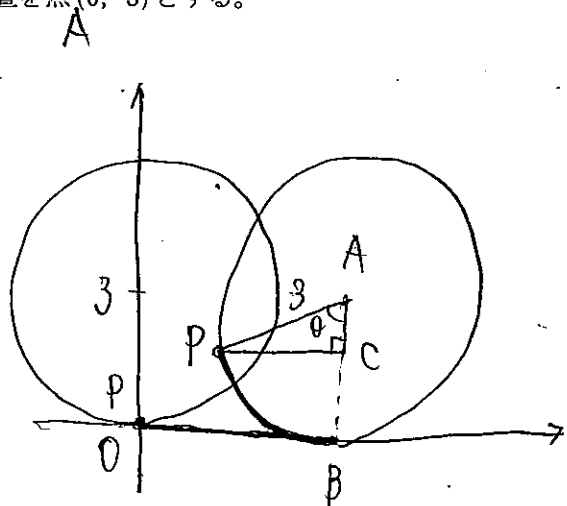
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\frac{(y-3)^2}{4} + \frac{(x-1)^2}{9} = 1$$

$$\text{楕円} \quad \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

26 【サイクロイド】

半径3の円がx軸上をすべることなく回転していくとき、円上の定点Pの描くサイクロイドの媒介変数表示を求めよ。ただし、点Pの最初の位置を原点O、円の中心の最初の位置を点(0, 3)とする。



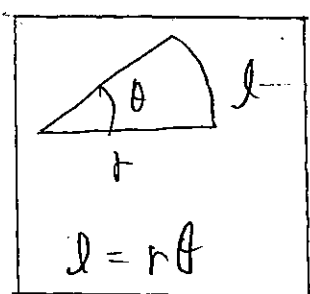
$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

\vec{OA} を求める

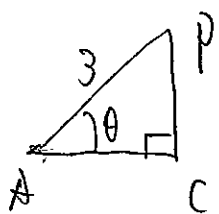
$$OB = \widehat{BP} = 3\theta$$

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 3\theta \\ 3 \end{pmatrix}$$

弧の長さ

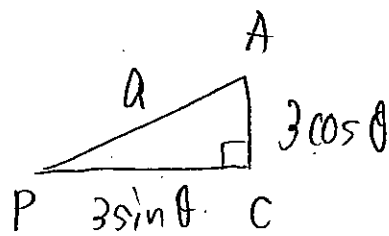


\vec{AP} を求める



$$AC = 3\cos\theta$$

$$PC = 3\sin\theta$$



$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} -3\sin\theta \\ -3\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 3\theta \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3\sin\theta \\ -3\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\theta - 3\sin\theta \\ 3 - 3\cos\theta \end{pmatrix}$$

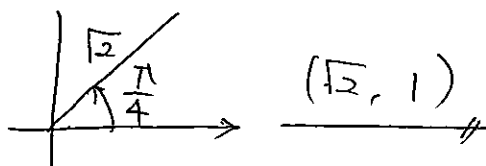
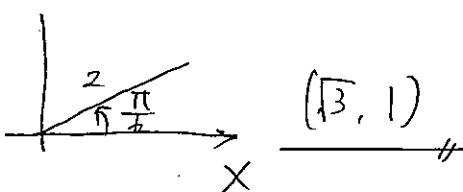
$$よって \quad \begin{cases} x = 3(\theta - \sin\theta) \\ y = 3(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

27 【極座標と直交座標】

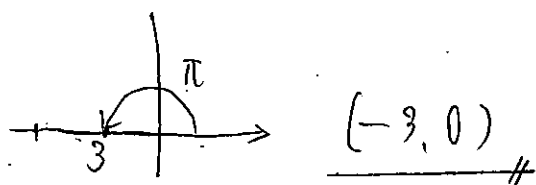
極座標が次のような点の直交座標を求めよ。

(1) $(2, \frac{\pi}{6})$

(2) $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$



(3) $(3, \pi)$

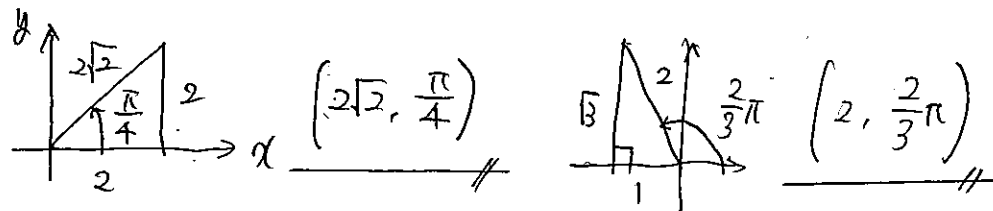


28

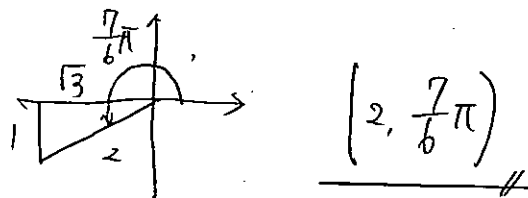
直交座標が次のような点の極座標を求めよ。ただし、偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $(2, 2)$

(2) $(-1, \sqrt{3})$



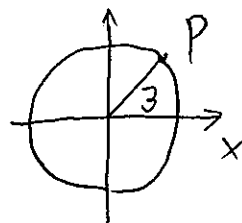
(3) $(-\sqrt{3}, -1)$



29 【極方程式】

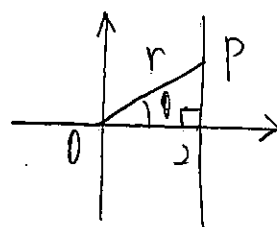
極座標に関して、次の円や直線の極方程式を求めよ。

(1) 極Oを中心とする半径3の円



$$r = 3$$

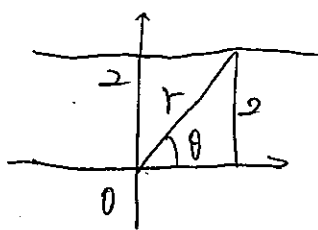
(2) 点(2, 0)を通り、始線に垂直な直線



$$\cos\theta = \frac{2}{r}$$

$$r = \frac{2}{\cos\theta}$$

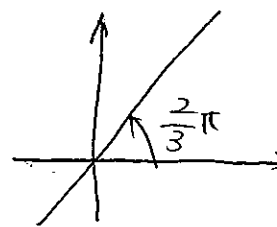
(3) 点 $(2, \frac{\pi}{2})$ を通り、始線に平行な直線



$$\sin\theta = \frac{2}{r}$$

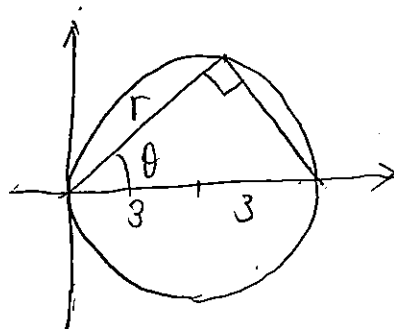
$$r = \frac{2}{\sin\theta}$$

(4) 極Oを通り、始線OXとなす角が $\frac{2}{3}\pi$ の直線



$$\theta = \frac{2}{3}\pi$$

(5) 中心Aの極座標が(3, 0)である半径3の円

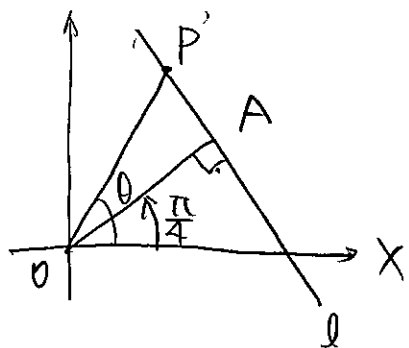


$$\cos\theta = \frac{r}{6}$$

$$r = 6\cos\theta$$

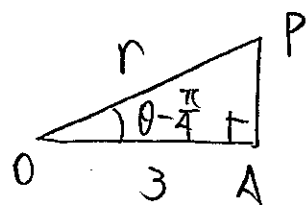
30

Oを極とする。極座標が $(3, \frac{\pi}{4})$ である点Aを通り、OAに垂直な直線lの極方程式を求めよ。



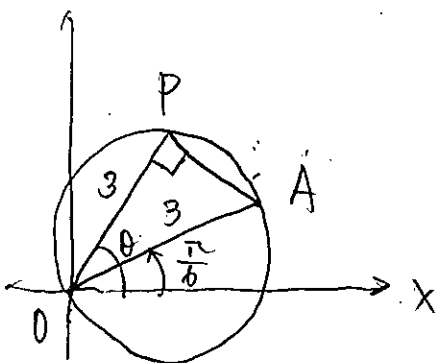
$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{r}$$

$$r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 3$$



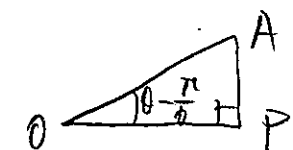
31

中心の極座標が $(3, \frac{\pi}{6})$ 、半径3である円の極方程式を求めよ。



$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{r}{6}$$

$$r = 6 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$



32 【直交座標と極方程式】

楕円 $x^2 + 2y^2 = 4$ を極方程式で表せ。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad \text{と置く}$$

$$r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \sin^2 \theta = 4$$

$$r^2 (\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta) = 4$$

$$r^2 (1 + \sin^2 \theta) = 4$$

33

次の極方程式の表す曲線を、直交座標の x, y の方程式で表せ。

(1) $r = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$

(2) $r = 2 \sin \theta$

$$r(\sin \theta + \cos \theta) = 1$$

$$y + x = 1$$

$$x + y - 1 = 0$$

$$r^2 = 2r \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 = 2y$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

(3) $r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 2$

$$r \left(\cos \theta \cos \frac{\pi}{6} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} y + \frac{1}{2} x = 2$$

$$x + \sqrt{3}y - 4 = 0$$

(4) $r = \frac{1}{1 + \cos \theta}$

$$r(1 + \cos \theta) = 1$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x = 1 \quad x^2 + y^2 = 1 - 2x + x^2$$

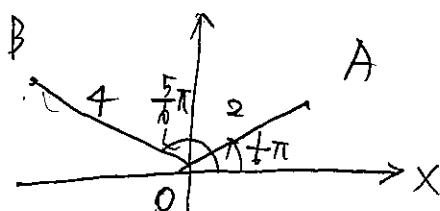
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - x$$

$$y^2 = -2x + 1$$

34

点A, Bの極座標を、それぞれ $(2, \frac{\pi}{6})$, $(4, \frac{5\pi}{6})$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 2点A, B間の距離ABを求めよ。



$$AB^2 = 20 + 8$$

$$= 28$$

$$AB = 2\sqrt{7}$$

$$AB^2 = 16 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cos \frac{4}{6}\pi \quad (\text{余弦})$$

(2) 2点A, Bを通る直線の極方程式を求めよ。

直交座標で表すと

$$A(\sqrt{3}, 1)$$

$$B(-2\sqrt{3}, 2)$$

直線ABの傾きは

$$\text{傾き} = \frac{1 - 2}{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$y - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{9}(x - \sqrt{3})$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta \quad \text{と置く}$$

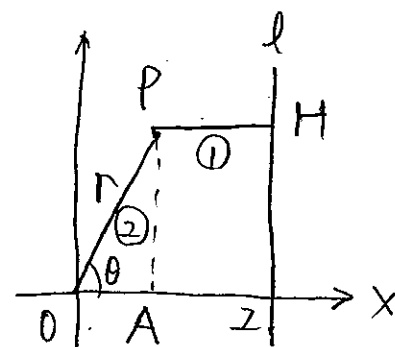
$$9y = -\sqrt{3}x + 3 + 1$$

$$\sqrt{3}x + 9y = 4$$

$$r(\sqrt{3} \cos \theta + 9 \sin \theta) = 4$$

35

始線OX上の点A(2, 0)を通り、始線に垂直な直線をlとする。点P(r, theta)からlに下ろした垂線をPHとすると、 $\frac{OP}{PH} = \frac{1}{2}$ であるようなPの軌跡を、極方程式で表せ。



$$\frac{OP}{PH} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{r}{2 - r \cos \theta} = \frac{1}{2}$$

$$2r = 2 - r \cos \theta$$

$$OP = r$$

$$PH = 2 - OA$$

$$= 2 - r \cos \theta$$

$$(2 + \cos \theta)r = 2$$

$$r = \frac{2}{2 + \cos \theta}$$