

複素数平面①（公式）

共役な複素数

- ① $z + \overline{z}$, $z\overline{z}$ は実数
- ② $\overline{\overline{z}} = z$
- ③ $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ (和) $\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$ (差)
- $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$ (積) $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ (商)
- $\overline{\alpha^n} = (\overline{\alpha})^n$ (累乗)

複素数の実数条件・純虚数条件

- z が実数 $\Rightarrow z = \overline{z}$ (頻出)
- z が純虚数 $\Rightarrow z \neq 0, z = -\overline{z}$

絶対値

- ① $z = a + bi$ のとき $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- ② (i) $|z| = 0 \iff z = 0$
- (ii) $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$
- (iii) $|z|^2 = z\overline{z}$ (頻出)
- $|z|^2 = z\overline{z} \iff z\overline{z} = 1 \iff \overline{z} = \frac{1}{z}$
- (iv) $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|, \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$
- ③ 2点 A(α), B(β) の距離は $AB = |\beta - \alpha|$

例

A($2 + 3i$), B($1 + 6i$) の距離は
 $|(1 + 6i) - (2 + 3i)| = |-1 + 3i| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

実数倍

3点 0, α , β が一直線上 $\iff \beta = k\alpha$ (k は実数)

内分・外分

2点 α , β を $m : n$ に内分 $\frac{n\alpha + m\beta}{m + n}$

2点 α , β を $m : n$ に外分 $\frac{-n\alpha + m\beta}{m - n}$

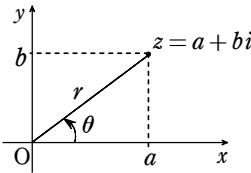
重心

3点 α , β , γ の重心 $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$

極形式

$z = r(\cos \theta + i\sin \theta)$

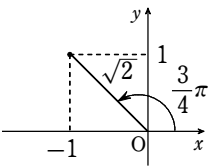
$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



例

$z = -1 + i$ のとき

$z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i\sin \frac{3}{4}\pi\right)$



積の極形式

$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i\sin \theta_1), z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i\sin \theta_2)$ のとき

$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

例

$\alpha = \sqrt{3} + i, \beta = -1 + \sqrt{3}i$ のときの $\alpha\beta$ を極形式で表すと

$\alpha = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i\sin \frac{\pi}{6}\right), \beta = 2\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i\sin \frac{2}{3}\pi\right)$

$\alpha\beta = 4\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi\right)\right\}$

$= 4\left(\cos \frac{5}{6}\pi + i\sin \frac{5}{6}\pi\right)$

積の極形式の図形的意味

点 $r(\cos \theta + i\sin \theta) \cdot z$ は、点 z を原点を中心に θ だけ回転させて、長さを r 倍した点

例

$z = r(\cos \theta + i\sin \theta), \alpha = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i\sin \frac{\pi}{6}\right)$ のとき

$az = 2r\left\{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\right\}$

点 az は、点 z を原点を中心に $\frac{\pi}{6}$ 回転させて、長さを 2 倍にした点

商の極形式

$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i\sin \theta_1), z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i\sin \theta_2)$ のとき

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$

例

$\alpha = 2 + 2i, \beta = \sqrt{3} + i$ のときの $\frac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表すと

$\alpha = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4}\right), \beta = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i\sin \frac{\pi}{6}\right)$

$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$= \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i\sin \frac{\pi}{12}\right)$

原点 O を中心とする回転移動

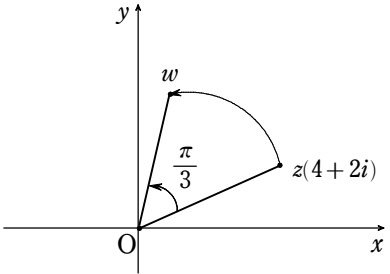
原点 O を中心として点 z を反時計回りに θ 回転移動させた点 w は

$$w = (\cos \theta + i \sin \theta) z$$

例

点 $z = 4 + 2i$ を、原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点 w

$$\begin{aligned} w &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) z \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) (4 + 2i) \\ &= (2 - \sqrt{3}) + (1 + 2\sqrt{3}) i \end{aligned}$$



点 α を中心とする回転移動

点 α を中心として点 β を反時計回りに θ 回転移動させた点 γ は

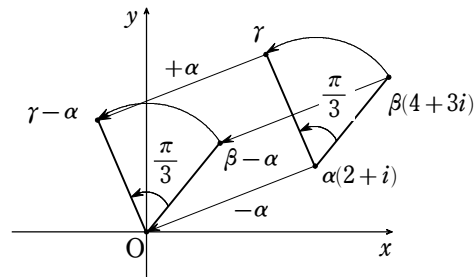
$$\gamma - \alpha = (\cos \theta + i \sin \theta) (\beta - \alpha)$$

γ, β をそれぞれ $-\alpha$ 平行移動して、原点を中心に θ 回転移動する

例

点 $\beta = 4 + 3i$ を、点 $\alpha = 2 + i$ を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点 γ

$$\begin{aligned} \gamma - \alpha &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (\beta - \alpha) + \alpha \\ \gamma - (2 + i) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) (4 + 3i - (2 + i)) \\ \gamma &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) (2 - 2i) + (2 + i) \\ &= (3 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3}) i \end{aligned}$$



ド・モアブルの定理

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (n : \text{整数})$$

例

$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ のとき

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + i)^6 &= 2^6 \left\{ \cos \left(6 \times \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(6 \times \frac{\pi}{6} \right) \right\} \\ &= 64 (\cos \pi + i \sin \pi) \\ &= -64 \end{aligned}$$

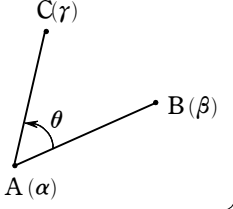
1 の n 乗根

$$z_k = \cos \left(\frac{2\pi}{n} \times k \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{n} \times k \right) \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1)$$

1 の n 乗根とは、 $z^n = 1$ の解で、これらを表す点は、原点を中心とする半径 1 の円周上にあり、正 n 角形の頂点である

2 直線のなす角

$\angle BAC$ は $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ を極形式で表せばわかる



方程式の表す図形

2 点 $A(\alpha), B(\beta)$ に対して

$$|z - \alpha| = |z - \beta| \quad \Rightarrow \quad \text{線分 AB の垂直二等分線}$$

$$|z - \alpha| = r \quad \Rightarrow \quad \text{点 } \alpha \text{ を中心とする半径 } r \text{ の円}$$

アポロニウスの円

$$n|z - \alpha| = m|z - \beta|$$

$A(\alpha), B(\beta)$ を
 $m : n$ に内分する点 C
 $m : n$ に外分する点 D とすると

直径 CD の円

注 $m = n$ のとき AB の垂直二等分線

例

方程式 $2|z - i| = |z + 2i|$ を満たす点 z の全体はどのような図形か。

$A(i), B(-2i)$ とすると

AB を $1 : 2$ に内分する点 C $\frac{2i + 1(-2i)}{1 + 2} = 0$

AB を $1 : 2$ に外分する点 D $\frac{-2i + 1(-2i)}{1 - 2} = \frac{-4i}{-1} = 4i$

直径 CD の円

複素数平面の解法

	解法	メリット	デメリット
①	z のまま	計算量 少	z の慣れが必要
②	極形式	回転, n 乗	三角関数の計算
③	図形	計算量 少	図形の慣れが必要
④	$z = x + yi$	万能	計算量 多
⑤	ベクトル	ベクトルで解ける	問題が少ない