

対数関数 (公式)

対数

$$\bigcirc^\Delta = \square \iff \log_{\bigcirc} \square = \Delta$$

例

$$\log_3 81 = 4 \iff 3^4 = 81$$

対数関数の性質

$$\log \bigcirc + \log \Delta = \log \bigcirc \Delta$$

$$\log \bigcirc - \log \Delta = \log \frac{\bigcirc}{\Delta}$$

$$\log \bigcirc^\Delta = \Delta \log \bigcirc$$

例

$$\begin{aligned} \log_3 4 + \log_3 18 - 3\log_3 2 &= \log_3 4 + \log_3 18 - \log_3 2^3 \\ &= \log_3 \frac{4 \times 18}{8} \\ &= \log_3 9 \\ &= 3 \end{aligned}$$

底の変換公式

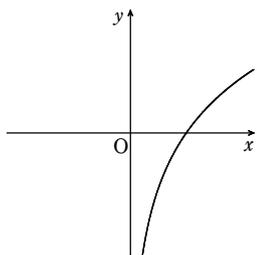
$$\log_{\bigcirc} \Delta = \frac{\log_{\square} \Delta}{\log_{\square} \bigcirc}$$

例

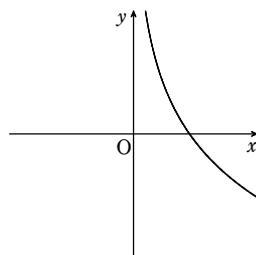
$$\begin{aligned} \log_4 8 &= \frac{\log_2 8}{\log_2 4} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

対数関数のグラフ

$$y = \log_2 x$$



$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$



大小関係

$\Delta > 1$ のとき

$$\log_{\Delta} \bigcirc > \log_{\Delta} \square \iff \bigcirc > \square$$

$0 < \Delta < 1$ のとき

不等号が逆になる

$$\log_{\Delta} \bigcirc > \log_{\Delta} \square \iff \bigcirc < \square$$

桁数

$$x \text{ が } n \text{ 桁} \iff 10^{n-1} \leq x < 10^n$$

$$\iff n-1 \leq \log_{10} x < n$$

例

3^{20} は何桁の数か。 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

解答

$$\begin{aligned} \log_{10} 3^{20} &= 20 \log_{10} 3 \\ &= 20 \times 0.4771 \\ &= 9.542 \end{aligned}$$

$$9 < \log_{10} 3^{20} < 10$$

$$10^9 < 3^{20} < 10^{10}$$

よって 7 桁

小数第何位

$$x \text{ は小数第 } n \text{ 位に初めて } 0 \text{ でない数が現れる} \iff 10^{-n} \leq x < 10^{-n+1}$$

$$\iff -n \leq \log_{10} x < -n+1$$

例

$\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

解答

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{10} &= 10 \log_{10} \frac{1}{5} \\ &= 10 \log_{10} \frac{2}{10} \\ &= 10(\log_{10} 2 - \log_{10} 10) \\ &= 10(0.3010 - 1) \\ &= -6.990 \end{aligned}$$

$$-7 < \log_{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{10} < -6$$

$$10^{-7} < \left(\frac{1}{5}\right)^{10} < 10^{-6}$$

よって 小数第 7 位