1 【不定積分】

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\,dx$

$= \frac{1}{-2}x^{-2} + C$

$= -\frac{1}{2x^2} + C$

(2) $\int x^{\frac{1}{3}}dx$

$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

(3) $\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx$

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$

$= \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$

(4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx$

$= 2x^{\frac{1}{2}} + C$

$= 2\sqrt{x} + C$

2

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$

$= \int (x^{-1} - 4x^{-2} + x^{-3})dx$

$= \log|x| + \frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$

(2) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx$

$= \int (x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}})dx$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C$

$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + C$

(3) $\int \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{y}dy$　　$y>0$

$= \int \frac{y - 2\sqrt{y} + 1}{y}dy$

$= \int (1 - 2y^{-\frac{1}{2}} + y^{-1})dy$

$= y - 4\sqrt{y} + \log|y| + C$

$= y - 4\sqrt{y} + \log y + C$

(4) $\int \left(3t^2 - \frac{1}{t}\right)^2 dt$

$= \int (9t^4 - 6t + t^{-2})dt$

$= \frac{9}{5}t^5 - 3t^2 - \frac{1}{t} + C$

3

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (\cos x - 2\sin x)dx$

$= \sin x + 2\cos x + C$

(2) $\int \frac{2\cos^3 x - 1}{\cos^2 x}dx$

$= \int \left(2\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

$= 2\sin x - \tan x + C$

(3) $\int 5^x dx$

$= \frac{5^x}{\log 5} + C$

(4) $\int (3^x - 2e^x)dx$

$= \frac{3^x}{\log 3} - 2e^x + C$

(5) $\int \frac{dx}{\tan^2 x} = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$

$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx$

$= -\frac{1}{\tan x} - x + C$

4

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (3x+1)^4 dx$

$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}(3x+1)^5 + C$

$= \frac{1}{15}(3x+1)^5 + C$

(2) $\int (4x-3)^{-3}dx$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(4x-3)^{-2} + C$

$= -\frac{1}{8}(4x-3)^{-2} + C$

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$

$= \int (1-2x)^{-\frac{1}{2}}dx$

$= 2\cdot\frac{1}{-2}(1-2x)^{\frac{1}{2}} + C$

$= -\sqrt{1-2x} + C$

(4) $\int \frac{dx}{2x+1}$

$= \frac{1}{2}\log|2x+1| + C$

(5) $\int \sin 2x\,dx$

$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

(6) $\int e^{3x-1}dx$

$= \frac{1}{3}e^{3x-1} + C$

5 【置換積分法】

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x(1-x)^4 dx$

$1-x = t$ とおく

$x = 1-t$

$\frac{dx}{dt} = -1$

$dx = -dt$

$\int (t-1)t^4 dt$

$= \int (t^5 - t^4)dt$

$= \frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{5}t^5 + C$

$= \frac{1}{30}t^5(5t-6) + C$

$= -\frac{1}{30}(1-x)^5(5x+1) + C$

(2) $\int x\sqrt{2x-1}\,dx$

$\sqrt{2x-1} = t$ とおく

$2x-1 = t^2$

$2x = t^2+1$

$x = \frac{1}{2}(t^2+1)$

$\frac{dx}{dt} = t$

$dx = t\,dt$

$\int \frac{1}{2}(t^2+1)t\cdot t\,dt$

$= \frac{1}{2}\int (t^4+t^2)dt$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right) + C$

$= \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{6}t^3 + C$

$= \frac{1}{30}t^3(3t^2+5) + C$

$= \frac{1}{15}(3x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$

(3) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

$\sqrt{x+1} = t$ とおく

$x+1 = t^2$

$x = t^2-1$

$\frac{dx}{dt} = 2t$

$dx = 2t\,dt$

$\int \frac{t^2-1}{t}2t\cdot dt$

$= 2\int (t^2-1)dt$

$= 2\left(\frac{1}{3}t^3 - t\right) + C$

$= \frac{2}{3}t^3 - 2t + C$

$= \frac{2}{3}t(t^2-3) + C$

$= \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + C$

6

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$

$x^3+2=t$ とおく

$x^3=t-2$

$\frac{dx}{dt}\,3x^2=1$

$dx=\frac{1}{3x^2}dt$

$\frac{1}{3}\int\sqrt{t}\,dt$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{2}{9}(x^3+2)\sqrt{x^3+2}+C$ //

(2) $\int \sin^3 x\cos x\,dx$

$\sin x=t$ とおく

$\frac{dx}{dt}\cos x=1$

$dx=\frac{1}{\cos x}dt$

$\int t^3dt=\frac{1}{4}t^4+C$

$=\frac{1}{4}\sin^4 x+C$ //

(3) $\int\frac{\log x}{x}dx$

$\log x=t$ とおく

$\frac{dx}{dt}\,\frac{1}{x}=1$

$dx=x\,dt$

$\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C$

$=\frac{1}{2}(\log x)^2+C$ //

7 【$\frac{g'(x)}{g(x)}$の不定積分】

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int\frac{2x+1}{x^2+x-1}dx$

$=\log|x^2+x-1|+C$ //

(2) $\int\frac{e^x}{e^x+1}dx$

$=\log|e^x+1|+C$ //

(3) $\int\frac{dx}{\tan x}=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$

$=\log|\sin x|+C$ //

8 【部分積分法】

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x\sin x\,dx$

$=\int x(-\cos x)'\,dx$

$=-x\cos x+\int\cos x\,dx$

$=-x\cos x+\sin x+C$ //

(2) $\int xe^{-x}dx$

$=\int x(-e^{-x})'\,dx$

$=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$

$=-xe^{-x}-e^{-x}+C$

$=-(x+1)e^{-x}+C$ //

9

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int\log 2x\,dx$

$=\int(x)'\log 2x\,dx$

$=x\log 2x-\int x\frac{1}{2x}\cdot 2\,dx$

$=x\log 2x-x+C$ //

(2) $\int\log x^2dx$

$=2\int(x)'\log x\,dx$

$=2\left(x\log x-\int dx\right)$

$=2x\log x-2x+C$ //

(3) $\int x\log x\,dx$

$=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx$

$=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{1}{2}\int x\,dx$

$=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{1}{4}x^2+C$ //

10

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int\frac{x^2-1}{x+2}dx$

$=\int\left(x-2+\frac{3}{x+2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2-2x+3\log|x+2|+C$ //

$x-2$

$$\begin{array}{r} 1\ \ -2 \\ 1\ \ 2\ \overline{)\ 1\ \ \ 0\ \ -1} \\ 1\ \ \ 2\qquad \\ \hline -2\ \ -1 \\ -2\ \ -4 \\ \hline 3 \end{array}$$

(2) $\int\frac{4x^2}{2x-1}dx$

$=\int\left(2x+1+\frac{1}{2x-1}\right)dx$

$=x^2+x+\frac{1}{2}\log|2x-1|+C$ //

$2x+1$

$$\begin{array}{r} 2\ \ \ 1 \\ 2\ \ -1\ \overline{)\ 4\ \ \ 0\ \ \ 0} \\ 4\ \ -2\qquad \\ \hline 2\ \ \ 0 \\ 2\ \ -1 \\ \hline 1 \end{array}$$

(3) $\int\frac{3}{x^2+x-2}dx$

$=\int\frac{3}{(x+2)(x-1)}dx$

$=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\log|x-1|-\log|x+2|+C=\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$ //

11

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \cos^2 x\,dx$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$

$= \frac{1}{2}\int(\cos 2x + 1)dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + x\right) + C$

$= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$ //

(2) $\int \sin^2 3x\,dx$

$\cos 6x = 1 - 2\sin^2 3x$

$\sin^2 3x = \dfrac{1-\cos 6x}{2}$

$= \frac{1}{2}\int(1-\cos 6x)dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\sin 6x\right) + C$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$ //

(3) $\int \sin x\cos x\,dx$

$= \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx$

$= -\frac{1}{4}\cos 2x + C$ //

(4) $\int \cos 3x\cos 2x\,dx$

$\cos(3x+2x) = \cos 3x\cos 2x - \sin 3x\sin 2x$

$\cos(3x-2x) = \cos 3x\cos 2x + \sin 3x\sin 2x$

$2\cos 3x\cos 2x = \cos 5x + \cos x$

$= \frac{1}{2}\int(\cos 5x + \cos x)dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x + \sin x\right) + C$

$= \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C$ //

(5) $\int \sin x\sin 3x\,dx$

$\cos(3x+x) = \cos 3x\cos x - \sin 3x\sin x$

$\cos(3x-x) = \cos 3x\cos x + \sin 3x\sin x$

$2\sin 3x\sin x = \cos 2x - \cos 4x$

$= \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \cos 4x)dx$

$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + C$

$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$ //

(6) $\int \sin 3x\cos 2x\,dx$

$\sin(3x+2x) = \sin 3x\cos 2x + \cos 3x\sin 2x$

$\sin(3x-2x) = \sin 3x\cos 2x - \cos 3x\sin 2x$

$2\sin 3x\cos 2x = \sin 5x + \sin x$

$= \frac{1}{2}\int(\sin 5x + \sin x)dx$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C$

$= -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C$ //

12 【定積分】

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \int_1^2 x^{-2}dx$

$= -\left[x^{-1}\right]_1^2$

$= -\left(\frac{1}{2} - 1\right)$

$= \frac{1}{2}$ //

(2) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx = \int_1^8 x^{\frac{1}{3}}dx$

$= \frac{3}{4}\left[x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8$

$= \frac{3}{4}(16-1)$

$= \frac{45}{4}$ //

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta$

$= \left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 1$ //

(4) $\int_0^1 e^x dx$

$= \left[e^x\right]_0^1$

$= e - 1$ //

(5) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$

$= \left[\log|x|\right]_{-2}^{-1}$

$= \log 1 - \log 2$

$= -\log 2$ //

(6) $\int_{-1}^1 2^x dx$

$= \left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_{-1}^1$

$= \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{2\log 2}$

$= \frac{3}{2\log 2}$ //

13

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx = \int_1^2 (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$

$= \frac{2}{3}\left(3^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right)$

$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$ //

(2) $\int_0^1 (2x+1)^3 dx$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[(2x+1)^4\right]_0^1$

$= \frac{1}{8}(81-1)$

$= 10$ //

(3) $\int_{-1}^1 (e^t - e^{-t})dt$

$= \left[e^t + e^{-t}\right]_{-1}^1$

$= \left(e + \frac{1}{e}\right) - \left(\frac{1}{e} + e\right)$

$= 0$ //

(4) $\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[-\cos 2x\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{2}(-1+1)$

$= 0$ //

(5) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int(\cos 2x + 1)dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x + x\right]_0^{2\pi}$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi$

$= \pi$ //

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta\cos 2\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 6\theta + \sin 2\theta)dx$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{6}\cos 6\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

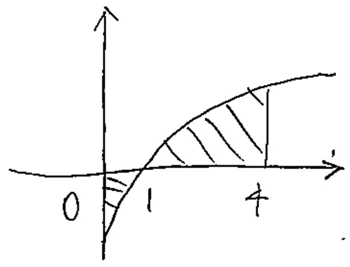
$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)\right\}$

$= \frac{2}{3}$ //

14【絶対値のついた定積分】

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^4 |\sqrt{x}-1|\,dx$



$$= -\int_0^1 (\sqrt{x}-1)\,dx + \int_1^4 (\sqrt{x}-1)\,dx$$

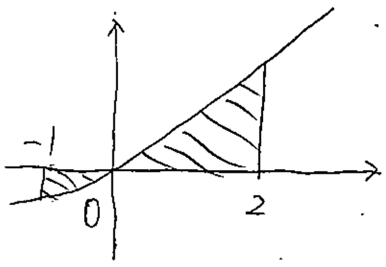
$$= -\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x\right]_1^4$$

$$= -\left(\frac{2}{3}-1\right) + \left(\frac{16}{3}-4\right) - \left(\frac{2}{3}-1\right)$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}$$

$$= \underline{2}$$

(2) $\int_{-1}^2 |e^x-1|\,dx$



$$= -\int_{-1}^0 (e^x-1)\,dx + \int_0^2 (e^x-1)\,dx$$

$$= -\left[e^x - x\right]_{-1}^0 + \left[e^x - x\right]_0^2$$

$$= -\left\{1 - \left(\frac{1}{e}+1\right)\right\} + e^2 - 2 - 1$$

$$= \frac{1}{e} + 1 + e^2 - 4 = \underline{e^2 + \frac{1}{e} - 3}$$

15【置換積分】

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1 x(1-x)^5\,dx$

$1-x=t$ とおく.

$x = 1-t$

$\frac{dx}{dt} = -1$

$dx = -dt$

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow 1 \\ \hline t & 1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\int_0^1 (1-t)t^5\,dt = \int_0^1 (t^5 - t^6)\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{7}t^7\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$$

$$= \underline{\frac{1}{42}}$$

(2) $\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

$\sqrt{x-1} = t$ とおく

$x-1 = t^2$

$x = t^2+1$

$\frac{dx}{dt} = 2t$

$dx = 2t\,dt$

$$\begin{array}{c|c} x & 2 \longrightarrow 5 \\ \hline t & 1 \longrightarrow 2 \end{array}$$

$$2\int_1^2 (t^2+1)t^2\,dt = 2\int_1^2 (t^4+t^2)\,dt$$

$$= 2\left[\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right]_1^2$$

$$= 2\left\{\frac{32}{5} + \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$= 2\left(\frac{31}{5} + \frac{7}{3}\right)$$

$$= \underline{\frac{256}{15}}$$

16【$\sqrt{a^2-x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ の定積分】

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

$x = \sin\theta$ とおく.

$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$

$dx = \cos\theta\,d\theta$

$$\begin{array}{c|c} x & -1 \longrightarrow 1 \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \underline{\frac{\pi}{2}}$$

(2) $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$

$x = 2\sin\theta$ とおく

$\frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta$

$dx = 2\cos\theta\,d\theta$

$$\begin{array}{c|c} x & -1 \longrightarrow \sqrt{3} \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{3} \end{array}$$

$$2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4-4\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 2\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2\left\{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\}$$

$$= 2\left(\frac{2}{6}\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \underline{\pi + \sqrt{3}}$$

(3) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$x = 2\sin\theta$ とおく.

$\frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta$

$dx = 2\cos\theta\,d\theta$

$$\begin{array}{c|c} x & 1 \longrightarrow \sqrt{3} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{3} \end{array}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \left[\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \underline{\frac{\pi}{6}}$$

17【$\frac{1}{x^2+a^2}$ の定積分】

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$

$x=\tan\theta$ とおく

$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

x	$0 \to \sqrt{3}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{3}$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta+1} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta$

$=\frac{\pi}{3}$ //

(2) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4}$

$x=2\tan\theta$

$\frac{dx}{d\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta}$

$dx=\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$-2 \to 2$
θ	$-\frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1} \cdot \frac{2}{\cos^2\theta} d\theta$

$=\frac{1}{2}\left[\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{\pi}{4}$ //

18【偶関数，奇関数】

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2+4x+5)dx$

$=2\int_0^2 (3x^2+5)dx$

$=2\left[x^3+5x\right]_0^2$

$=2\cdot 18$

$=36$ //

(2) $\int_{-1}^{1}(e^x-e^{-x})dx$

$=0$ //

(3) $\int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx$

$=0$ //

(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$

$2\sin^2 x = 1-\cos 2x$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)\,dx$

$=\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi}{2}$ //

19【部分積分】

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

$=\int_0^{\pi} x(-\cos x)'dx$

$=\left[-x\cos x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx$

$=\pi+\left[\sin x\right]_0^{\pi}$

$=\pi$ //

(2) $\int_0^1 xe^x dx$

$=\int_0^1 x(e^x)'dx$

$=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx$

$=e-\left[e^x\right]_0^1$

$=e-(e-1)$ $=1$ //

(3) $\int_1^2 x\log x\,dx$

$=\int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx$

$=\frac{1}{2}\left[x^2\log x\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 x^2 \log x\,dx$

$=\frac{1}{2}\cdot 4\log 2-\frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^2$

$=2\log 2-\frac{3}{4}$ //

20　置換でもできる

部分積分法によって，定積分 $\int_{-1}^{1}(x+1)^3(x-1)dx$ を求めよ。

$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}(x+1)^4\right)'(x-1)dx$

$=\frac{1}{4}\left[(x+1)^4(x-1)\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{4}\left[(x+1)^4\right]_{-1}^{1}$

$=-\frac{1}{20}\left[(x+1)^5\right]_{-1}^{1}$

$=-\frac{1}{20}\cdot 2^5$

$=-\frac{32}{20}$

$=-\frac{8}{5}$ //

21

定積分 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$ を求めよ。

$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^x)'\cos x\,dx$

$=\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^x)'\sin x\,dx$

$=-1+\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx}_{=J}$

$2J=-1+e^{\frac{\pi}{2}}$

$J=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$ //

22

n は0または正の整数とする。定積分 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ について，次の問いに答えよ。

ただし，$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$ である。

(1) I_0，I_1 を求めよ。

$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\dfrac{\pi}{2}$ //

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$ //

(2) $n\geqq 2$ のとき，$\sin^n x=\sin^{n-1}x\sin x=\sin^{n-1}x(-\cos x)'$ である。
I_n に部分積分法を適して，次のことを示せ。
$n\geqq 2$ のとき　$I_n=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x(-\cos x)'dx$

$=-\left[\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-2}x-\sin^n x)dx$

$=(n-1)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\right\}$

$=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$

(3) $n\geqq 2$ のとき，次のことを示せ。

n が偶数のとき　$I_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

n が奇数のとき　$I_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1$

(2)より　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

n が偶数のとき　$I_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

n が奇数のとき　$I_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1$

23 【定積分と導関数】

次の関数を x で微分せよ。ただし，(2) では $x>0$ とする。

(1) $\int_0^x\sin t\,dt$　　(2) $\int_1^x t\log t\,dt$

(1) $=\cos x$ //

(2) $=x\log x$ //

24

関数 $G(x)=\int_0^x(x-t)e^t dt$ について，$G'(x)$ および $G''(x)$ を求めよ。

$G(x)=x\int_0^x e^t dt-\int_0^x te^t dt$

$G'(x)=\int_0^x e^t dt+xe^x-xe^x$

$=\left[e^t\right]_0^x$

$=e^x-1$ //

$G''(x)=e^x$ //

25

関数 $\int_x^{3x}t\cos t\,dt$ を x で微分せよ。

$f(x)\underset{微分}{\overset{積分}{\rightleftarrows}}F(x)$

$f(t)=t\cos t$ とおく

$\int_x^{3x}f(t)dt=F(3x)-F(x)$

両辺ビブン

$\dfrac{d}{dx}\int_x^{3x}f(t)dt=3f(3x)-f(x)$

$=3\cdot 3x\cos 3x-x\cos x$

$=9x\cos 3x-x\cos x$ //

26

等式 $f(x)=x+\int_0^1 f(t)e^t dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$a=\int_0^1 f(t)e^t dt$　とおくと

$f(x)=x+a$

$f(t)=t+a$

$a=\int_0^1(t+a)e^t dt$

$=\int_0^1(t+a)(e^t)'dt$

$=\left[(t+a)e^t\right]_0^1-\int_0^1 e^t dt$

$=(1+a)e-a-(e-1)$

$=e+ae-a-e+1$

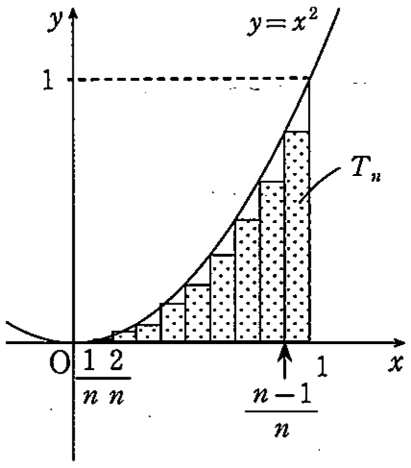
$2a-ae=1$

$a=\dfrac{1}{2-e}$　　∴ $f(x)=x+\dfrac{1}{2-e}$ //

27【区分求積法】

右図のように区間 [0, 1] を n 等分して n 個の長方形を作り，それらの面積の和を S_n とする。
長方形の面積の和を T_n とするとき，$\lim_{n\to\infty} T_n=S$

となることを示せ。



$T_n=\frac{1}{n}\left\{0+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$

横　縦

$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2$

$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$

よって

$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$

$S=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$

よって

$\lim_{n\to\infty}T_n=S$

28

次の極限値を求めよ。

(1)　$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{2}{n}\right)^4+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^4\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$　$(f(x)=x^4)$

$=\int_0^1 x^4\,dx=\frac{1}{5}\left[x^5\right]_0^1=\frac{1}{5}$

(2)　$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}+\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{n}{n}}\right)$

$=\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$　$f(x)=\frac{1}{1+x}$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\left[\log|1+x|\right]_0^1=\log 2$

29【定積分と不等式】

次のことを示せ。

(1)　$x\geqq 0$ のとき　$\frac{1}{x+1}\geqq\frac{1}{x^2+x+1}$

$x+1\leqq x^2+x+1$

両辺⊕なので　逆数をとって

$\frac{1}{x^2+x+1}\leqq\frac{1}{x+1}$

(2)　$\log 2>\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}$

(1) より

$\frac{1}{x+1}>\frac{1}{x^2+x+1}$

$\int_0^1\frac{1}{x+1}\,dx>\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}\,dx$

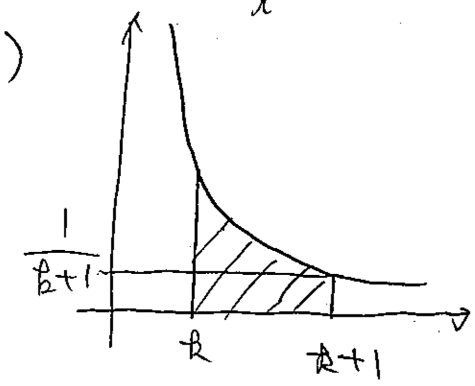
よって

$\log 2>\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}$

30

関数 $f(x)=\frac{1}{x}$ の定積分を利用して，次の不等式を証明せよ。

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\log(n+1)$　　ただし，n は自然数



$k\leqq x\leqq k+1$　(k:自然数)

逆数とる

$\frac{1}{x}<\frac{1}{k}$

$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,dx$

$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx<\frac{1}{k}$

$\frac{1}{k}>\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx$

$k=1,2,3\ldots n$ のときまで両辺をたすと

$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx$

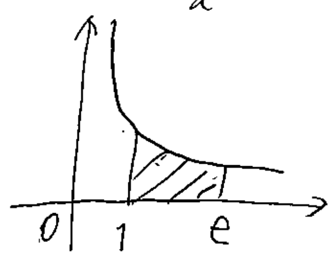
$=\left[\log|x|\right]_1^{n+1}$

$=\log(n+1)$

31

次の 2 直線，および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

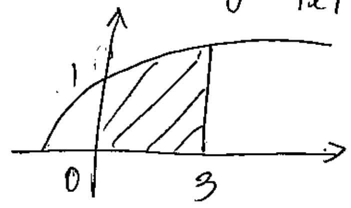
(1)　$y=\frac{1}{x}$，$x=1$，$x=e$



$S=\int_1^e\frac{1}{x}\,dx$

$=\left[\log x\right]_1^e=1$

(2)　$y=\sqrt{x+1}$，$x=0$，$x=3$



$S=\int_0^3\sqrt{x+1}\,dx$

$=\frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$

$=\frac{2}{3}\cdot(8-1)=\frac{14}{3}$

32

曲線 $y=e^x-e$ と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

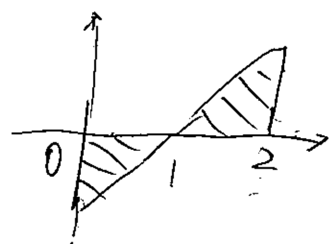
$e^x-e=0$

$e^x=e$

$x=1$

$x=\frac{1}{2}$ のとき

$y=\frac{1}{e}-e<0$



$S=-\int_0^1(e^x-e)\,dx+\int_1^2(e^x-e)\,dx$

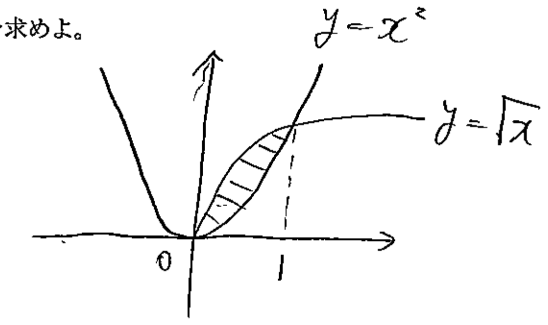
$=-\left[e^x-1\right]_0^1+\left[e^x-1\right]_1^2$

$=-(e-1)+(e^2-1)-(e-1)=e^2-2e+1$

33

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$



①②より

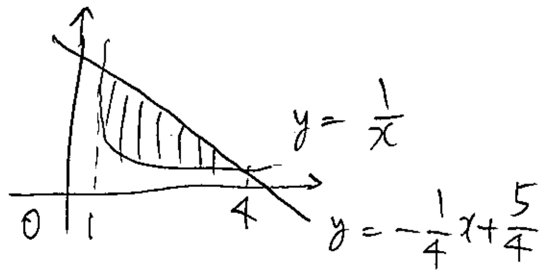
$x^2=\sqrt{x}$

$x=0, 1$

$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(2) $x+4y=5$, $xy=1$



$4y=-x+5$

$y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ —①'

①'②より

$x\left(-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\right)=1$

$-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{4}x-1=0$

$\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}x+1=0$

$x^2-5x+4=0$

$(x-4)(x-1)=0$

$x=1, 4$

$S=\int_1^4\left(-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{x}\right)dx$

$=-\int_1^4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}\right)dx$

$=-\left[\log|x|+\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{4}x\right]_1^4$

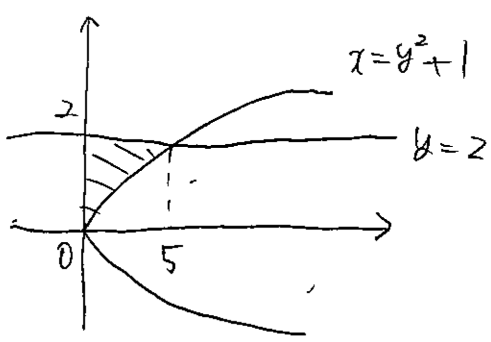
$=-\left(\log 4+2-5-\frac{1}{8}+\frac{5}{4}\right)$

$=\frac{15}{8}-2\log 2$

34

次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $x=y^2+1$, x 軸, y 軸, $y=2$

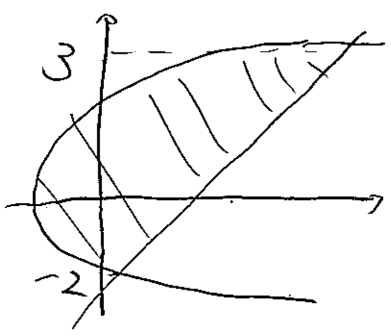


$S=\int_0^2(y^2+1)dy$

$=\left[\frac{y^3}{3}+y\right]_0^2$

$=\frac{14}{3}$

(2) $x=y^2-1$, $x=y+5$



①②より

$y^2-1=y+5$

$y^2-y-6=0$

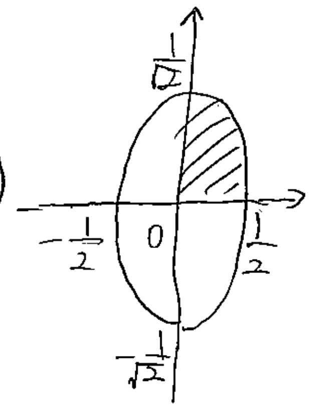
$(y-3)(y+2)=0$

$y=-2, 3$

$S=\int_{-2}^3-(y-3)(y-2)dy=\frac{(3+2)^3}{6}=\frac{125}{6}$

35

曲線 $4x^2+2y^2=1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。



$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$

$2y^2=1-4x^2$

$y^2=\frac{1}{2}(1-4x^2)$

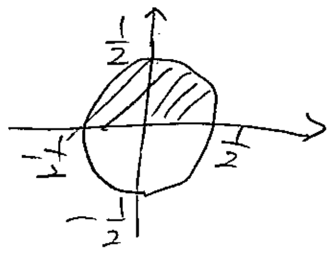
$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-4x^2}$

$S=4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-4x^2}\,dx$

$y=\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$

$x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

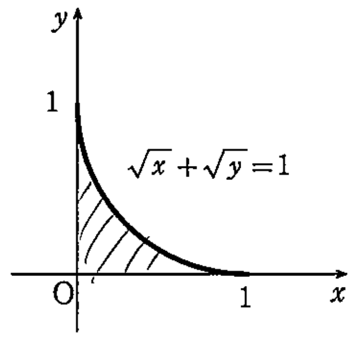
$=4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi$



$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

36

曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ は右の図のようになる。
この曲線と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。



$\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$

$y=(1-\sqrt{x})^2$

$S=\int_0^1(1-\sqrt{x})^2dx$

$=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)\,dx$

$=\left[x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

37【媒介変数表示の曲線と面積】

次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$x=3\cos\theta$, $y=2\sin\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$\int_{-3}^3 y\,dx$

$\frac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta$

θ	$0\to\pi$
x	$3\to-3$

$=\int_0^\pi 2\sin\theta\cdot-3\sin\theta\,d\theta$

$=6\int_0^\pi\sin^2\theta\,d\theta$

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$

$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

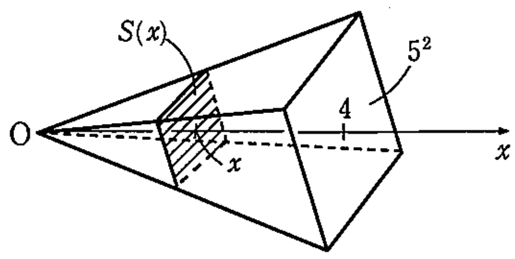
$=3\int_0^\pi(1-\cos 2\theta)d\theta$

$=3\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^\pi$

$=3\pi$

38【角錐の体積と定積分】

四角錐の頂点を原点 O とし，頂点から底面に下ろした垂線を x 軸にとる。
$0 \leqq x \leqq 4$ として，x 軸上で座標が x である点を通り，x 軸に垂直な平面でこの立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とする。
1 辺の長さが 5 の正方形を底面とする高さ 4 の四角錐の体積 V を求めよ。



$$\text{断面}:\text{底面} = x : 4$$

$$\text{断面積}:\text{底面積} = x^2 : 4^2$$

$$S(x) : 5^2 = x^2 : 4^2$$

$$S(x) = \frac{25x^2}{16}$$

$$V = \int_0^4 S(x)\,dx$$

$$= \frac{25}{16}\int_0^4 x^2\,dx$$

$$= \frac{25}{48}\Big[x^3\Big]_0^4$$

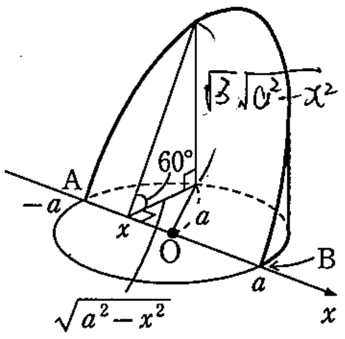
$$= \frac{25 \cdot 4^3}{48}$$

$$= \frac{100}{3}$$

解答 $\frac{100}{3}$

39【断面積 $S(x)$ と立体の体積 V】

右図のように，底面の半径 a 　　　　の直円柱を，底面の直径を含み底面と 60° の角をなす平面で切断する。
底面の直径 AB を x 軸に，中心を原点 O にとる。
座標が $x\,(-a \leqq x \leqq a)$ である点を通り，x 軸に垂直な平面で題意の立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とする。
このとき，底面とこの平面で挟まれた部分の体積 V を求めよ。



直円柱の高さ

$$h = \sqrt{3}\sqrt{a^2 - x^2}$$

断面積

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

体積

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\Big[a^2x - \frac{1}{3}x^3\Big]_{-a}^{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{a^3 - \frac{1}{3}a^3 - \left(-a^3 + \frac{1}{3}a^3\right)\right\}$$

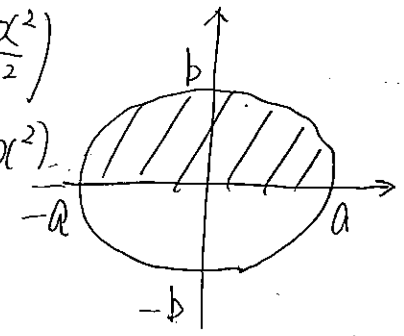
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$$

解答 $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$

40

$a>0$，$b>0$ とする。楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた図形が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$



$$V = \pi\int_{-a}^{a} y^2\,dx$$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)\,dx$$

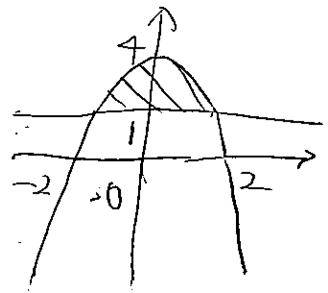
$$= \frac{\pi b^2}{a^2}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3$$

$$= \frac{4}{3}ab^2\pi$$

41【y 軸の周りの回転体の体積】

次の曲線と直線で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(1) $y=4-x^2$，$y=1$



$$V = \pi\int_1^4 x^2\,dy$$

$$= \pi\int_1^4 (4-y)\,dy$$

$$= \pi\Big[4y - \frac{1}{2}y^2\Big]_1^4$$

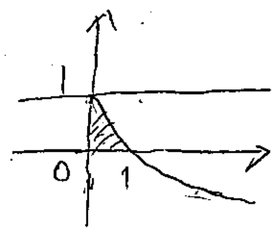
$$= \pi\left\{(16-8) - \left(4 - \frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{9}{2}\pi$$

(2) $y=1-\sqrt{x}$，x 軸

$$y = -\sqrt{x} + 1$$

$$\sqrt{x} = 1 - y$$

$$x^2 = (1-y)^4$$



$$V = \pi\int_0^1 x^2\,dy$$

$$= \pi\int_0^1 (1-y)^4\,dy$$

$$= -\frac{1}{5}\pi\Big[(1-y)^5\Big]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

42【円環体】

放物線 $y=4x-x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

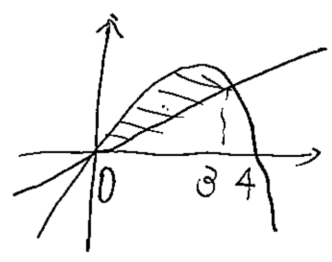
$$y = -x^2 + 4x$$

$$= -x(x-4)$$

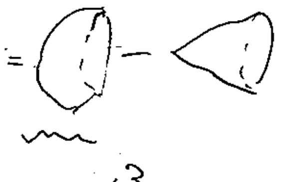
$$x = 4x - x^2$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$



V =



$$V = \pi\int_0^3 (4x - x^2)^2\,dx - \pi\int_0^3 x^2\,dx$$

$$= \pi\left\{\int_0^3 (16x^2 - 8x^3 + x^4)\,dx - \int_0^3 x^2\,dx\right\}$$

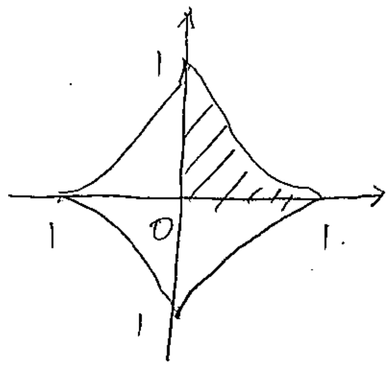
$$= \pi\int_0^3 (15x^2 - 8x^3 + x^4)\,dx$$

$$= \pi\Big[5x^3 - 2x^4 + \frac{1}{5}x^5\Big]_0^3 = \frac{108}{5}\pi$$

43【媒介変数表示された曲線と回転体の体積】

アステロイド $x=\cos^3\theta$，$y=\sin^3\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$ で囲まれた図形が，x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積Vを求めよ。

$V=2\pi\int_0^1 y^2\,dx$



$\frac{dx}{d\theta}=3\cos^2\theta\,-\sin\theta$

$dx=-3\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta$

θ	$\frac{\pi}{2}\to 0$
x	$0\to 1$

$V=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\theta\cos^2\theta\,d\theta$

$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta$

$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7\theta-\sin^9\theta)\,d\theta$

$=6\pi\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)$

$=6\pi\left(\frac{9\cdot6\cdot4\cdot2-8\cdot6\cdot4\cdot2}{9\cdot7\cdot5\cdot3}\right)$

$=\frac{2(9-8)6\cdot4\cdot2}{9\cdot7\cdot5}\pi=\frac{2\cdot3\cdot4\cdot2}{3\cdot7\cdot5}\pi=\frac{48}{105}\pi$

44【速度と位置】

数直線上を運動する点Pの速度が，時刻 t の関数として $v=4-2t$ で与えられている。$t=0$ におけるPの座標が2であるとき，$t=3$ のときのPの座標を求めよ。

$x=2+\int_0^3(4-2t)\,dt$

$=2+\left[4t-t^2\right]_0^3$

$=5$

45【数直線上の運動と道のり】

数直線上を運動する点Pがあり，時刻 t におけるPの速さは $v=\sin 2t$ であるとする。$t=0$ から $t=\pi$ までにPが通過する道のり s を求めよ。

$s=\int_0^{\pi}|\sin 2t|\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2t)\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin 2t)\,dt$

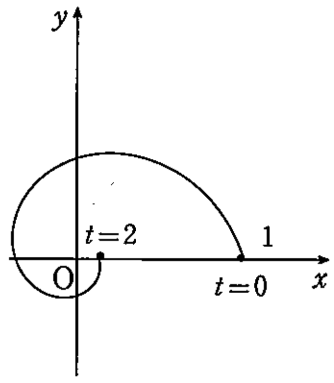
$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$=2$

46【座標平面上の運動と道のり】

座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x=e^{-t}\cos\pi t$，$y=e^{-t}\sin\pi t$ で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までにPが通過する道のり s を求めよ。



$s=\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos\pi t-e^{-t}\sin\pi t$

$=-e^{-t}(\cos\pi t+\pi\sin\pi t)$

$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin\pi t+e^{-t}\pi\cos\pi t$

$=-e^{-t}(\sin\pi t-\pi\cos\pi t)$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=e^{-2t}\{\sin^2\pi t+\cos^2\pi t+\pi^2(\sin^2\pi t+\cos^2\pi t)\}$

$=e^{-2t}(1+\pi^2)$

$s=\sqrt{1+\pi^2}\int_0^2 e^{-t}\,dt=\sqrt{1+\pi^2}\left[-e^{-t}\right]_0^2$

$=\sqrt{1+\pi^2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$

47【サイクロイドの長さ】

曲線 $x=2(t-\sin t)$，$y=2(1-\cos t)$　$(0\leqq t\leqq 2\pi)$ の長さ L を求めよ。

$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$\frac{dx}{dt}=2(1-\cos t)$　　$\frac{dy}{dt}=2\sin t$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=4(1-2\cos t+\cos^2 t)+4\sin^2 t$

$=4-8\cos t+4$

$=8(1-\cos t)$

$L=\sqrt{8}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt$

$=\sqrt{8}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\,dt$

$=4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-8\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=-8(-1-1)$

$=16$

$\left(\begin{array}{l}\cos 2t=1-2\sin^2 t\\ 2\sin^2 t=1-\cos 2t\\ 2\sin^2\frac{t}{2}=1-\cos t\end{array}\right)$

48【曲線の長さ】

曲線 $y=x\sqrt{x}$　$(0\leqq x\leqq 5)$ の長さ L を求めよ。

$L=\int_0^5\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dx=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$

$y=x^{\frac{3}{2}}$

$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left[\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5$

$=\frac{8}{27}\left\{\left(\frac{49}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$

$=\frac{8}{27}\left(\frac{343}{8}-\frac{8}{8}\right)$

$=\frac{335}{27}$