1 【無限数列の収束・発散】

次の数列の極限値を調べよ。

(1) $-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ \frac{(-1)^n}{n}$

0

(2) $\cos\pi,\ \cos3\pi,\ \cos5\pi,\ \cdots\cdots,\ \cos(2n-1)\pi,\ \cdots\cdots$

-1

2

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(2n^3-n^2)$

$=\infty$

(2) $\lim_{n\to\infty}(n-3n^2)$

$=-\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty}(2n-n^3)$

$=-\infty$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}$

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n^2+3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=0$

(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{2n+1}$

3

次の極限を求めよ。

$\lim_{n\to\infty}\frac{4+7+10+\cdots\cdots+(3n+1)}{5+8+11+\cdots\cdots+(3n+2)}$

初4，公差3の等差数列の和

初5，公差3の等差数列の和

分子 $=\frac{n}{2}\{8+(n-1)\cdot3\}=\frac{n}{2}(3n+5)$

~~分母~~ $=\frac{n}{2}\{10+(n-1)\cdot3\}=\frac{n}{2}(3n+7)$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{3n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}}{3+\frac{7}{n}}$

$=1$

4

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)}{\sqrt{n^2-n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2-n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}=-\frac{1}{2}$

5 【はさみうちの定理】

θ を定数とするとき，次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}$

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$

$-1\leqq\cos\frac{n\theta}{6}\leqq1$

$-\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}\leqq\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}=0$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2n\theta}{n^2+1}$

$-1\leqq\sin\theta\leqq1$

$0\leqq\sin^2n\theta\leqq1$

$0\leqq\frac{\sin^2n\theta}{n^2+1}\leqq\frac{1}{n^2+1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$

$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2n\theta}{n^2+1}=0$

6 【無限等比数列】

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $(\sqrt{3})^n$

∞

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

0

(3) $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$

振動

(4) $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

0

7

数列 $\{(x^2+2x)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

$-1<x^2+2x\leqq1$

$-1<x^2+2x$

$x^2+2x+1>0$

$(x+1)^2>0$

$x=-1$ 以外の
すべての実数 —①

$x^2+2x\leqq1$

$x^2+2x-1\leqq0$

$x^2+2x-1=0$

$x=-1\pm\sqrt{1+1}$

$=-1\pm\sqrt{2}$

$-1-\sqrt{2}\leqq x\leqq-1+\sqrt{2}$ —②

①②より

$-1-\sqrt{2}\leqq x<-1$

$-1<x\leqq-1+\sqrt{2}$

8

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^n+2^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

$=1$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^n}{3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$

$=0$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n-2^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

$=0$

(4) $\lim_{n\to\infty}(5^n-4^n)$

$=\lim_{n\to\infty}5^n\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}$

$=\infty$

9

数列 $\left\{\frac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を，次の各場合について求めよ。

(1) $r>1$

$\dfrac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r^n}+1} \xrightarrow[\infty]{} -1$ //

(2) $r=1$

0 //

(3) $|r|<1$

1 //

(4) $r<-1$

$\dfrac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r^n}+1} \xrightarrow[\infty]{} -1$ //

10

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ。

$a_1=1,\ a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n+1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$x=-\frac{1}{3}x+1$

$x=\frac{3}{4}$

$a_{n+1}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{9}\left(a_n-\frac{3}{4}\right)$

$a_n-\frac{3}{4}$ は初 $a_1-\frac{3}{4}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ の等比数列

公比 $-\frac{1}{3}$

$a_n-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$a_n=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{4} \xrightarrow[\infty]{} \frac{3}{4}$ //

11【無限級数】

次のような無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$S_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$\xrightarrow[\infty]{} \frac{3}{4}$ //

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}$

$=\frac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)$

$S_n=(\cancel{\sqrt{3}}-1)+(\sqrt{5}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots+$
$+\cdots+(\sqrt{2n-1}-\cancel{\sqrt{2n-3}})+(\sqrt{2n+1}-\cancel{\sqrt{2n-1}})$

$\xrightarrow[\infty]{} \infty$

∴ 発散 //

12【無限等比級数】

次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) 初項 1，公比 $\frac{1}{2}$

$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$ //

(2) 初項 $\sqrt{2}$，公比 $\sqrt{2}$

発散 //

(3) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\cdots\cdots$

初 1 公比 $-\frac{1}{3}$

$\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$ //

(5) $(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\cdots\cdots$

初 $\sqrt{2}+1$ 公比 $\sqrt{2}-1$

$\dfrac{\sqrt{2}+1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}+4}{2}$ //

13

次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

(1) $1+(2-x)+(2-x)^2+\cdots\cdots$

$|2-x|<1$

$-1<2-x<1$

$-3<-x<-1$

$1<x<3$ //

(2) $x+x(2-x)+x(2-x)^2+\cdots\cdots$

$x=0$ のとき 0に収束

$|2-x|<1$

$-1<2-x<1$

$-3<-x<-1$

$1<x<3$

∴ $x=0,\ 1<x<3$ //

14

座標平面上で，点Pが原点Oから正の向きに1だけ進み，そこから負の向きに $\frac{1}{2^2}$，そこから正の向きに $\frac{1}{2^4}$，そこから負の向きに $\frac{1}{2^6}$ と進む。以下，このようなな運動を限りなく続けるとき，点Pの極限の位置の座標を求めよ。

$1,\ 1-\frac{1}{2^2},\ 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots$

$\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$ //

15

次の循環小数を分数で表せ。

(1) $0.\dot{6}$

$=0.66666\cdots$

$=0.6+0.06+0.006+\cdots$

初 0.6 公比 0.1

$\dfrac{0.6}{1-0.1}=\dfrac{0.6}{0.9}$

$=\frac{2}{3}$ //

(2) $0.2\dot{3}\dot{4}$

$0.2343434\cdots$

$=0.2+0.034+0.00034+\cdots$

初 0.034 公比 0.01

$=0.2+\dfrac{0.034}{1-0.01}$

$=0.2+\dfrac{0.034}{0.99}$

$=\frac{1}{5}+\frac{34}{990}=\frac{116}{495}$ //

(3) $0.4\dot{7}0\dot{2}$

$$0.4\dot{7}0\dot{2} = 0.4 + \underbrace{0.0702 + 0.0000702}$$

$$= 0.4 + \frac{0.0702}{1-0.001}$$ 初 0.0702 公比 0.001

$$= \frac{4}{10} + \frac{0.0702}{0.999}$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{702}{9990}$$

$$= \frac{3996}{9990} + \frac{702}{9990}$$

$$= \frac{4698}{9990}$$

$$= \frac{87}{185}$$ //

$\boxed{16}$

次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{2}{3^n}\right)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} + 2\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$ //

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 1 - 3 = -2$$ //

$\boxed{17}$

次の無限級数は発散することを示せ。

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{6}+\frac{5}{9}+\frac{7}{12}+\cdots\cdots+\frac{2n-1}{3n}+\cdots\cdots$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束 $\rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

対偶をとると，

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3} = \frac{2}{3}$ ∴ 発散 //

$\boxed{18}$ 【$\lim_{x\to a} f(x)$ の値】

次の極限を求めよ。(4) の a は 0 でない定数とする。

(1) $\lim_{x\to 1}(2x^2-3x-1)$

$= -2$ //

(2) $\lim_{x\to -2}(x-3)(x+2)$

$= 0$ //

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{(x-2)\cancel{(x-1)}}$$

$$= \frac{3}{-1} = -3$$ //

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+x}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{x}{a(a+x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{a(a+x)} = \frac{1}{a^2}$$ //

(5) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$$ //

(6) $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\sqrt{x}+2$$

$$= 4$$ //

$\boxed{19}$ 【極限と係数決定】

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2} = -1$

$\lim_{x\to 2}(a\sqrt{x}+b) = 0$ より

$\sqrt{2}a + b = 0$

$b = -\sqrt{2}a$

$$\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x}-\sqrt{2}a}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{2}} = -1$$

$a = -2\sqrt{2}$ $b = 4$ //

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0}(a\sqrt{x+4}+b) = 0$ より

$2a + b = 0$

$b = -2a$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\sqrt{x+4}-2a}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{a(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

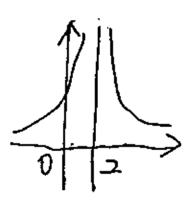
$$= \lim_{x\to 0}\frac{a}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \frac{a}{4} = 1$$ $a = 4$ $b = -8$ //

$\boxed{20}$ 【極限が有限でない場合】

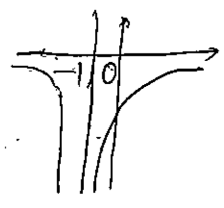
次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}$



$= \infty$ //

(2) $\lim_{x\to -1}\left\{-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}$



$= -\infty$ //

極限④

21【片側からの極限】

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}$　　$x>0$

$=\lim_{x\to+0}\frac{x}{x}$

$=1$

(2) $\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}$　　$x<0$

$=\lim_{x\to-0}\frac{-x}{x}$

$=-1$

(3) $\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$　　$x>1$, $x-1>0$

$=\lim_{x\to1+0}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$

$=\lim_{x\to1+0}(x+1)$

$=2$

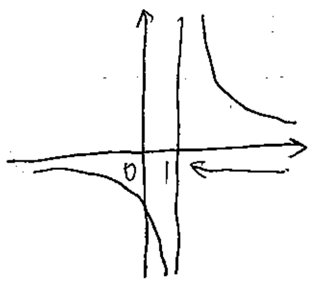
(4) $\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$　　$x<1$, $x-1<0$

$=\lim_{x\to1-0}\frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}$

$=\lim_{x\to1-0}-(x+1)$

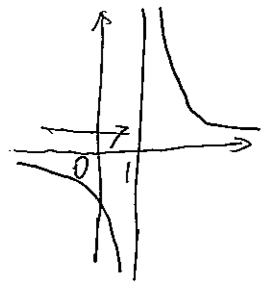
$=-2$

(5) $\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}$



∞

(6) $\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}$



$-\infty$

22【$\lim_{x\to\infty}f(x)$ の値】

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0$

(3) $\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)$

$=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)=\infty$

(4) $\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x)$

$=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)=\infty$

23【分数関数の極限】

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{4x+3}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{4+\frac{3}{x}}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+4}{2x^2-3x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5+\frac{4}{x^2}}{2-\frac{3}{x}}=\frac{5}{2}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{3x+2}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}-x}{3+\frac{2}{x}}=-\infty$

(4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2x}{x^2-4x+1}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$

24【無理関数の極限】

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=1$

(2) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+2x}+2x)$

$x=-t$ とおく

$\lim_{t\to\infty}(\sqrt{4t^2-2t}-2t)$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{4t^2-2t}-2t)(\sqrt{4t^2-2t}+2t)}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{4-\frac{2}{t}}+2}$

$=\frac{-2}{\sqrt{4}+2}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

25【指数・対数関数の極限】

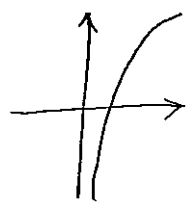
次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$

$=0$

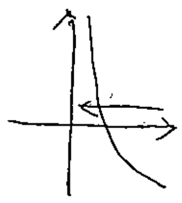
(2) $\lim_{x\to\infty}\log_2 x$

$=\infty$



(3) $\lim_{x\to+0}\log_{0.5}x$

$=\infty$



(4) $\lim_{x\to\infty}2^{-3x}$

$=0$

(5) $\lim_{x\to-\infty}2^{-2x}$

$=\infty$

(6) $\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x-1}{x+2}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}$

$=2$

26【三角関数の極限】

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to-\infty}\sin\frac{1}{x}$

$=0$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{1}{x}$

$=1$

(3) $\lim_{x\to\pi}\tan x$

$=0$

$\boxed{27}$

次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$

$0 \leqq \left|\cos\frac{1}{x}\right| \leqq 1$

$0 \leqq |x|\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leqq |x|$

$\lim_{x\to 0}|x| = 0$

$\therefore \lim_{x\to 0}\left|x\cos\frac{1}{x}\right| = 0$

$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$ //

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

$-1 \leqq \sin x \leqq 1$

$(x\to\infty$ より $x>0)$

$-\frac{1}{x} \leqq \frac{\sin x}{x} \leqq \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$ //

(3) $\lim_{x\to -\infty}\frac{\cos x}{x}$

$-1 \leqq \cos x \leqq 1$

$(x\to -\infty$ より $x<0)$

$-\frac{1}{x} \leqq \frac{\cos x}{x} \leqq \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to -\infty} -\frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x} = 0$

$\therefore \lim_{x\to -\infty}\frac{\cos x}{x} = 0$ //

$\boxed{28}$

次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2x}{3x}$

$= \frac{2}{3}$ //

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$

$= 1$ //

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{3x}{5x}$

$= \frac{3}{5}$ //

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$

$= \frac{1}{2}$ //

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x - 1}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{(\cos x-1)(\cos x+1)}$

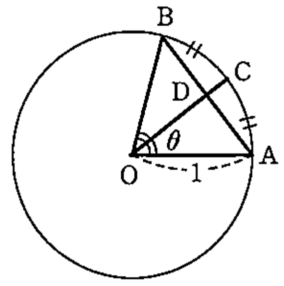
$= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{\cos^2 x-1}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{-\sin^2 x}$

$= \lim_{x\to 0} -(\cos x+1) = -2$ //

$\boxed{29}$

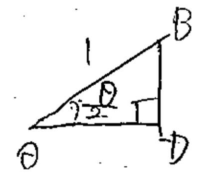
半径 1 の円 O の周上に中心角 θ ラジアン の弧 AB をとり，弧 AB を 2 等分する点を C とする。また，線分 OC と弦 AB の交点を D とする。弧 AB の長さを $\widehat{AB}$ で表すとき，極限$\lim_{\theta\to+0}\frac{CD}{\widehat{AB}^2}$ を求めよ。



$\widehat{AB} = 2\pi 1^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \theta$

$CD = OC - OD$

$= 1 - \cos\frac{\theta}{2}$



$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{OD}{1}$

$OD = \cos\frac{\theta}{2}$

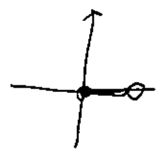
$\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2}$

$= \lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}$

$= \lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ //

$\boxed{30}$ **【関数の連続性】**

次の関数 $f(x)$ が，$x=0$ で連続であるか不連続であるかを調べよ。



(1) $f(x)=x[x]$

$\lim_{x\to+0} x[x] = 0\cdot 0 = 0$ 　 $f(0)=0$

$\lim_{x\to-0} x[x] = 0\cdot(-1) = 0$ 　 $\lim_{x\to 0} x[x] = f(0)$ $\therefore$ 連続 //

(2) $f(x)=(x+1)[x]$

$\lim_{x\to+0}(x+1)[x] = (0+1)\cdot 0 = 0$ 　 $\lim_{x\to+0}(x+1)[x] \neq \lim_{x\to-0}(x+1)[x]$

$\lim_{x\to-0}(x+1)[x] = (0+1)\cdot(-1) = -1$ 　 $\therefore$ 不連続 //

(3) $f(x)=\sqrt{x}$ 　 $(x\geqq 0)$

$\lim_{x\to+0}\sqrt{x} = 0$ 　 $\lim_{x\to+0}\sqrt{x} = f(0)$

$f(0) = 0$

$\therefore$ 連続 //

$\boxed{31}$ **【区間における連続】**

次の関数が連続である区間を求めよ。

(1) $f(x)=\sqrt{1-x}$

$1-x \geqq 0$

$x \leqq 1$

$(-\infty, 1]$ //

(2) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-3x+2}$

$= \frac{x+1}{(x-2)(x-1)}$

$x \neq 1, 2$

$(-\infty, 1), (1, 2)\ (2, \infty)$ //

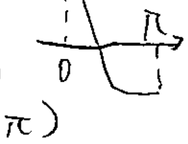
$\boxed{32}$ **【区間における連続】**

次の区間における関数 $f(x)=\cos x$ の最大値，最小値について調べよ。

(1) $[0, \pi]$

Max 1 $(x=0)$

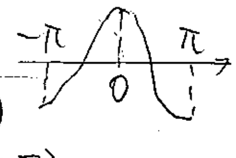
min -1 $(x=\pi)$ //



(2) $[-\pi, \pi]$

Max 1 $(x=0)$

min -1 $(x=-\pi, \pi)$ //



$\boxed{33}$ **【区間における連続】**

次の方程式は，(　) 内の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

(1) $x-\cos x=0$ 　 $(0<x<\pi)$

$f(x) = x - \cos x$

$f(0) = -1 < 0$

$f(\pi) = \pi - 1 > 0$

よって 題意を満たす

(2) $2^x-3x=0$ 　 $3<x<4$

$f(x) = 2^x - 3x$

$f(3) = 8-9 = -1 < 0$

$f(4) = 16-12 = 4 > 0$

よって 題意を満たす