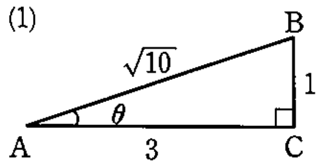
【三角比】

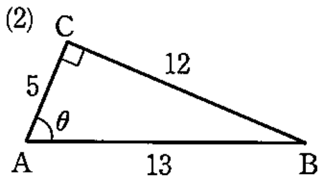
1 下の図において，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ。

(1)



$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$，$\tan\theta = \frac{1}{3}$ //

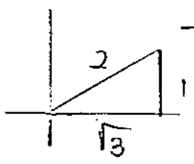
(2)



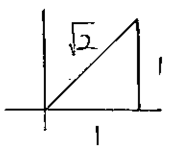
$\sin\theta = \frac{12}{13}$，$\cos\theta = \frac{5}{13}$，$\tan\theta = \frac{12}{5}$ //

2 次の値を求めよ。

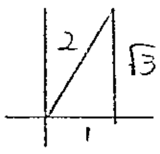
(1) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ //



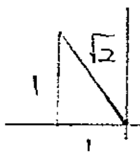
(2) $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ //



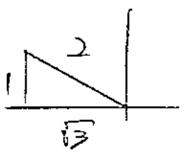
(3) $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ //



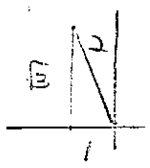
(4) $\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ //



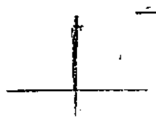
(5) $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ //



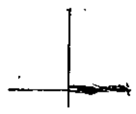
(6) $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$ //



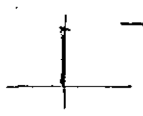
(7) $\sin 90^\circ = 1$ //



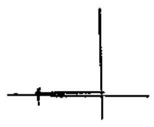
(8) $\sin 0^\circ = 0$ //



(9) $\cos 90^\circ = 0$ //

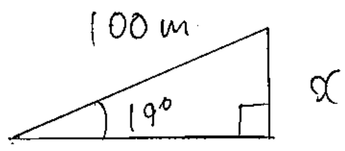


(10) $\cos 180^\circ = -1$ //



【三角比の応用】

3 傾斜角 19° の坂をまっすぐに 100 m 登るとき，鉛直方向には何 m 登ったことになるか。1 m 未満を四捨五入して求めよ。ただし，$\sin 19^\circ = 0.3256$，$\cos 19^\circ = 0.9455$，$\tan 19^\circ = 0.3443$ とする。



$\sin 19^\circ = \frac{x}{100}$

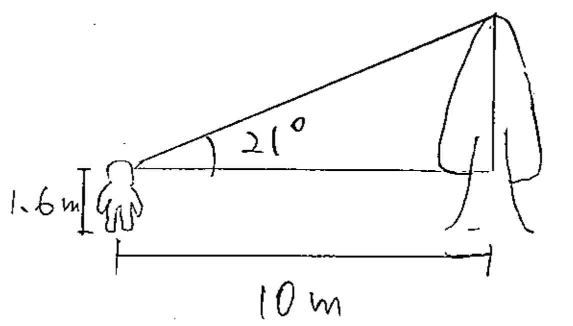
$x = \sin 19^\circ \times 100$

$= 0.3256 \times 100$

$= 32.56$

よって 33 m //

4 木の根もとから 10 m 離れた地点に立って木の先端を見上げると，水平面とのなす角が 21° であった。目の高さを 1.6 m として，木の高さを求めよ。ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ。ただし，$\sin 21^\circ = 0.3584$，$\cos 21^\circ = 0.9336$，$\tan 21^\circ = 0.3839$ とする。



$\tan 21^\circ = \frac{x}{10}$

$x = \tan 21^\circ \times 10$

$= 0.3839 \times 10$

$= 3.839$

$\fallingdotseq 3.8$

よって

$1.6 + 3.8 = 5.4$ (m) //

【$90^\circ-\theta$，$180^\circ-\theta$ の三角比と式の値】

5 次の式の値を求めよ。

(1) $\sin 70^\circ + \cos 100^\circ + \sin 170^\circ + \cos 160^\circ$

$= \cos 20^\circ - \cos 80^\circ + \sin 10^\circ + \cos 20^\circ$

$= \cos 20^\circ - \sin 10^\circ + \sin 10^\circ + \cos 20^\circ$

$= 0$ //

(2) $\sin 140^\circ \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \sin 50^\circ$

$= \sin 40^\circ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \cos 40^\circ$

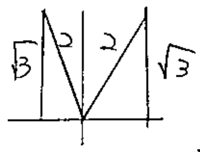
$= \sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ$

$= 1$ //

【三角比を含む方程式】

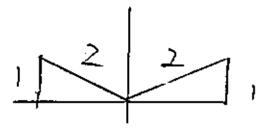
6 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次のような θ を求めよ。

(1) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$



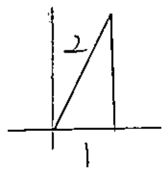
$\theta = 60^\circ, 120^\circ$ //

(2) $\sin\theta = \frac{1}{2}$



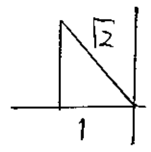
$\theta = 30^\circ, 150^\circ$ //

(3) $\cos\theta = \frac{1}{2}$



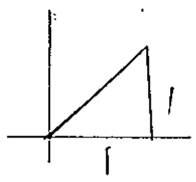
$\theta = 60^\circ$ //

(4) $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$



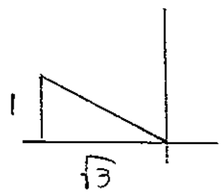
$\theta = 135^\circ$ //

(5) $\tan\theta = \frac{1}{1}$



$\theta = 45^\circ$ //

(6) $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

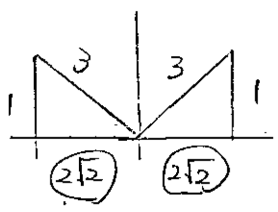


$\theta = 150^\circ$ //

【三角比の相互関係】

7 次の問いに答えよ。

(1) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。



$x^2 + 1 = 9$

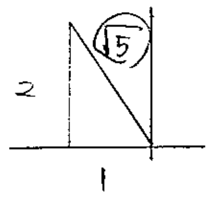
$x^2 = 8$

$x = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき $\tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき $\tan\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ //

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta = \frac{-2}{1}$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。



$x^2 = 1 + 4$

$x^2 = 5$

$x = \sqrt{5}$

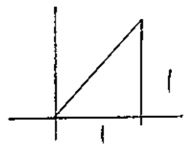
$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ //

【$\tan\theta$ と直線の傾き】

8 次の直線と x 軸の正の向きとのなす角 θ を求めよ。

(1) $y=x$

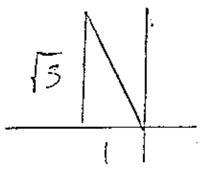
$\tan\theta=1$



$\theta=45^\circ$

(2) $y=-\sqrt{3}x$

$\tan\theta=-\sqrt{3}$



$\theta=120^\circ$

【三角比の式の値】

9 $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ とする。$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{4}$

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

(2) $\sin\theta-\cos\theta$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)$

$=\frac{7}{4}$

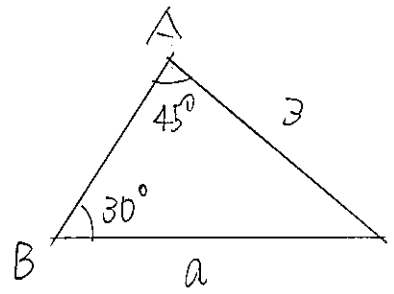
$\left(\sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$ より $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$

【正弦定理】

10 △ABC において，次の値を求めよ。

(1) $A=45^\circ$，$B=30^\circ$，$b=3$ のとき，a



$\frac{a}{\sin45^\circ}=\frac{3}{\sin30^\circ}$

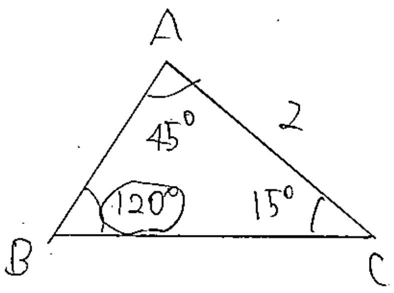
$\frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{3}{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}a=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$a=\frac{6}{\sqrt{2}}$

$a=3\sqrt{2}$

(2) $A=45^\circ$，$C=15^\circ$，$b=2$ のとき，外接円の半径 R



$2R=\frac{2}{\sin120^\circ}$

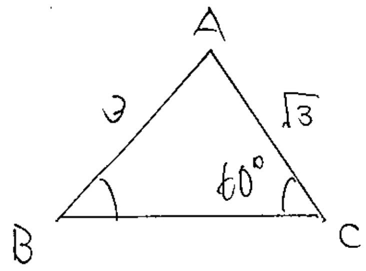
$2R=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$2R=\frac{4}{\sqrt{3}}$

$R=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

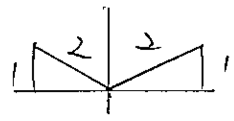
(3) $b=\sqrt{3}$，$c=3$，$C=60^\circ$ のとき，B



$\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sin B}$

$3\sin B=\frac{3}{2}$

$\sin B=\frac{1}{2}$



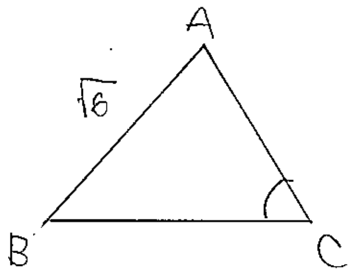
$\frac{3}{\sin60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sin B}$

$B=30^\circ$, ~~150°~~ 不適

よって

$B=30^\circ$

(4) $c=\sqrt{6}$，外接円の半径 $R=\sqrt{3}$ のとき，C



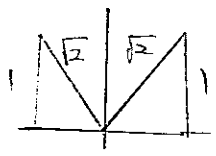
$\sin C=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$2R=\frac{\sqrt{6}}{\sin C}$

$\sin C=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{\sin C}$

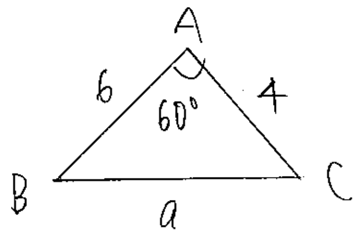


$C=45^\circ,\ 135^\circ$

【余弦定理】

11 △ABC において，次の値を求めよ。

(1) $b=4$，$c=6$，$A=60^\circ$ のとき，a



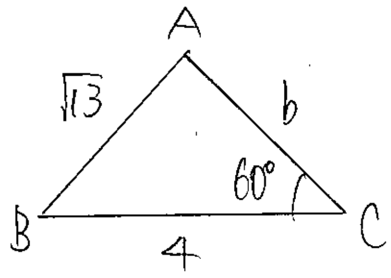
$a^2=36+16-2\cdot6\cdot4\cos60^\circ$（$\frac{1}{2}$）

$a^2=52-24$

$a^2=28$

$a=2\sqrt{7}$

(2) $a=4$，$c=\sqrt{13}$，$C=60^\circ$ のとき，b



$13=b^2+16-4b$

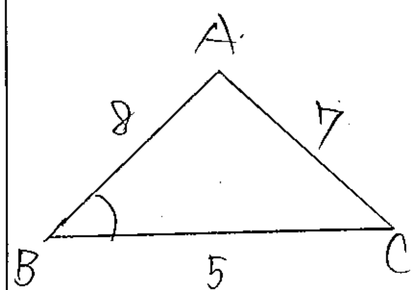
$b^2-4b+3=0$

$(b-1)(b-3)=0$

$13=b^2+16-2\cdot4\cdot b\cos60^\circ$（$\frac{1}{2}$）

$b=1,\ 3$

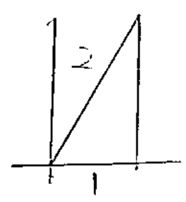
(3) $a=5$，$b=7$，$c=8$ のとき，B



$\cos B=\frac{40}{80}$

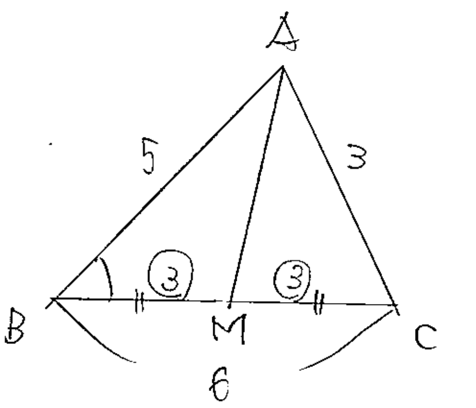
$\cos B=\frac{1}{2}$

$\cos B=\frac{64+25-49}{2\cdot8\cdot5}$



$B=60^\circ$

12 △ABCにおいて，AB=5，AC=3，BC=6 とする。辺 BC の中点を M とするとき，AM の長さを求めよ。



△ABC において

$\cos B = \frac{25+36-9}{2\cdot5\cdot6}$

$= \frac{52}{60}$

$= \frac{13}{15}$

△ABM において

$AM^2 = 25+9-2\cdot5\cdot3\cos B$

$= 34 - 30\cdot\frac{13}{15}$

$= 8$

よって

$AM = 2\sqrt{2}$ //

【鋭角・直角・鈍角三角形の判定】

13 △ABC の 3 辺の長さが次のようなとき，角 A が鋭角，直角，鈍角のいずれであるかを調べよ。

(1) $a=9$，$b=3\sqrt{2}$，$c=7$

$a^2=81$，$b^2=18$，$c^2=49$

$81 > 18+49$ より

鈍角 //

(2) $a=\sqrt{7}$，$b=\sqrt{6}$，$c=2$

$a^2=7$，$b^2=6$，$c^2=4$

$7 < 6+4$ より

鋭角 //

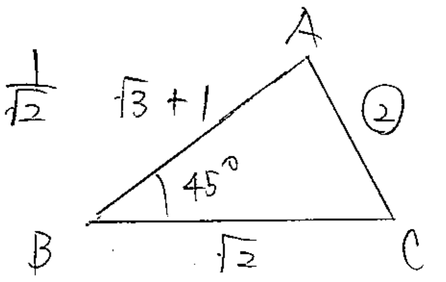
【三角形の辺と角の決定】

14 △ABC において，$a=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}+1$，$B=45°$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

$b^2 = (\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= 2+4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2$

$= 4$

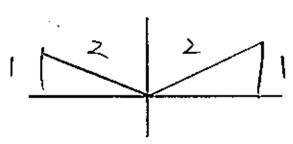


$b = 2$ //

$\frac{2}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{2}}{\sin A}$

$2\sin A = 1$

$\sin A = \frac{1}{2}$



$A = 30°$，$\cancel{150°}$ 不適

$C = 180° - 45° - 30°$

$= 105°$

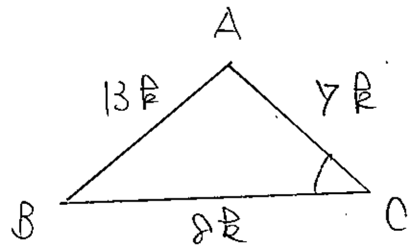
よって

$b=2$，$A=30°$，$C=105°$ //

15 △ABC において次が成り立つとき，この三角形の最大の角の大きさを求めよ。

$\sin A : \sin B : \sin C = 8 : 7 : 13$

$a=8k$，$b=7k$，$c=13k$（k：整数）とすると



$\cos C = \frac{49k^2+64k^2-169k^2}{2\cdot7k\cdot8k}$

$= \frac{-56k^2}{112k^2} = -\frac{1}{2}$

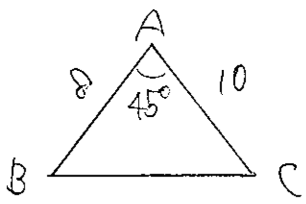
よって

$C = 120°$ //

【三角形の面積】

16 次のような図形の面積 S を求めよ。

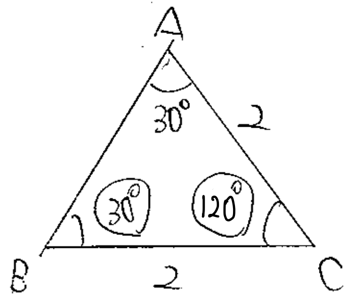
(1) $b=10$，$c=8$，$A=45°$ である △ABC



$S = \frac{1}{2}\cdot8\cdot10\,\sin 45°$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$ //

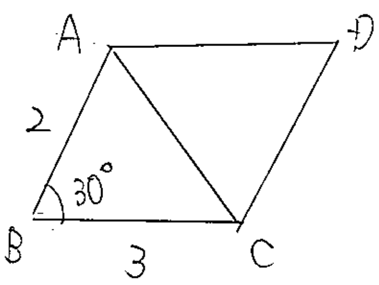
(2) $a=b=2$，$A=30°$ である △ABC



$S = \frac{1}{2}\cdot2\cdot2\,\sin120°$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \sqrt{3}$ //

(3) AB=2，BC=3，$B=30°$ である平行四辺形ABCD

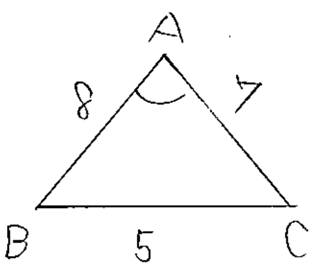


$S = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\,\sin30°$ $\frac{1}{2}$

$= 3$ //

17 △ABC において，$a=5$，$b=7$，$c=8$ のとき，次のものを求めよ。

(1) $\cos A$ の値

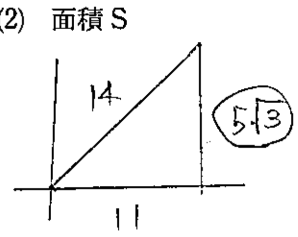


$\cos A = \frac{64+49-25}{2\cdot8\cdot7}$

$= \frac{88}{112}$

$= \frac{11}{14}$ //

(2) 面積 S



$x^2+11^2=14^2$

$x^2 = 196-121$

$= 75$

$x = 5\sqrt{3}$

$\sin A = \frac{5\sqrt{3}}{14}$

よって

$S = \frac{1}{2}\cdot8\cdot7\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}$

$= 10\sqrt{3}$ //

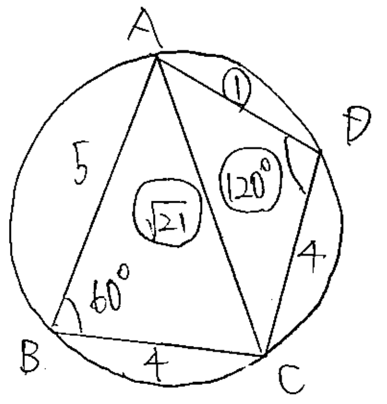
【円に内接する四角形の面積】

18 円に内接する四角形 ABCD があり，

AB=5，BC=4，CD=4，$\angle B=60°$

であるとき，次のものを求めよ。

(1) AC の長さ



$AC^2 = 16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\frac{1}{2}$

$= 41-20$

$= 21$

$AC = \sqrt{21}$

(2) AD の長さ

$21 = x^2+4^2-2\cdot4\cdot x\cos 120°$

$21 = x^2+16-8x\left(-\frac{1}{2}\right)$

$21 = x^2+16+4x$

$x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0$

$x=1,\ \cancel{-5}$
不適

よって

$AD=1$

(3) 四角形 ABCD の面積を求めよ。

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 5\sqrt{3}$

$\triangle ADC = \frac{1}{2}\cdot1\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \sqrt{3}$

よって

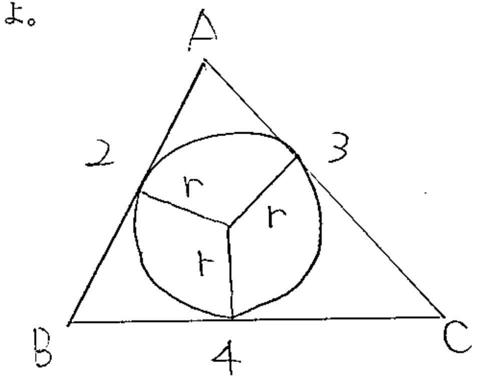
$\square ABCD = \triangle ABC + \triangle ADC$

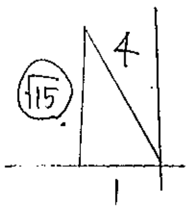
$= 5\sqrt{3}+\sqrt{3}$

$= 6\sqrt{3}$

【三角形の内接円の半径と面積】

19 $\triangle ABC$ において，$a=4$，$b=3$，$c=2$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めよ。





$x^2+1=16$

$x^2=15$

$x=\sqrt{15}$

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

面積 S を求める

$\cos A = \frac{4+9-16}{2\cdot2\cdot3}$

$= \frac{-3}{12}$

$= -\frac{1}{4}$

$\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$S = \frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$

$= \frac{3\sqrt{15}}{4}$

よって

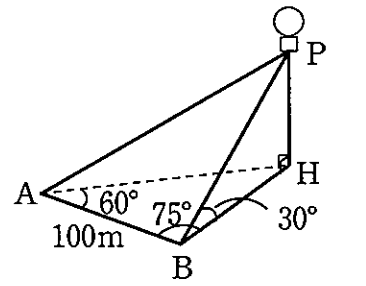
$\frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2}r(2+3+4)$

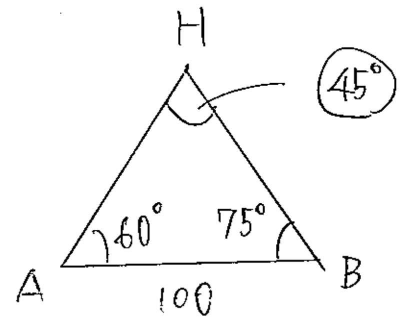
$\frac{9}{2}r = \frac{3\sqrt{15}}{4}$

$r = \frac{\sqrt{15}}{6}$

【空間図形への応用】

20 100 m 離れた 2 地点 A と B から，気球 P の真下の地点 H を見たとき，$\angle HAB=60°$，$\angle HBA=75°$ であった。また，B から P を見上げた角度は 30° であった。図において，気球 P の高さ PH を求めよ。

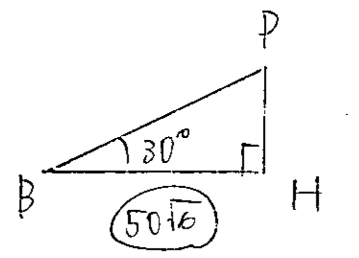




$\frac{HB}{\sin 60°} = \frac{100}{\sin 45°}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}HB = 100\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$HB = 50\sqrt{6}$



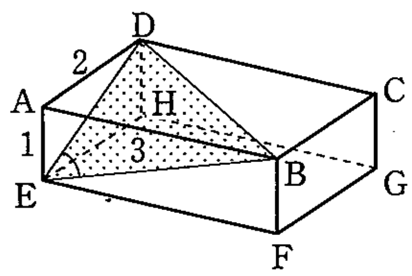
$\tan 30° = \frac{PH}{50\sqrt{6}}$

$PH = 50\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$

$PH = 50\sqrt{2}\ m$

21 AB=3，AD=2，AE=1 である直方体 ABCD－EFGH がある。

(1) $\cos\angle BED$ の値を求めよ。



$DE^2 = 1^2+2^2$

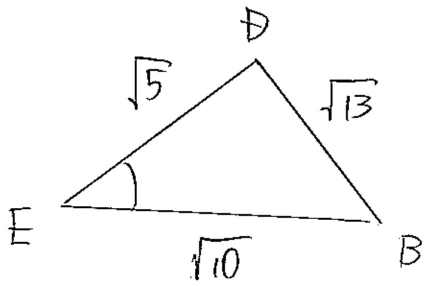
$DE = \sqrt{5}$

$BE^2 = 1^2+3^2$

$BE = \sqrt{10}$

$BD^2 = 3^2+2^2$

$BD = \sqrt{13}$

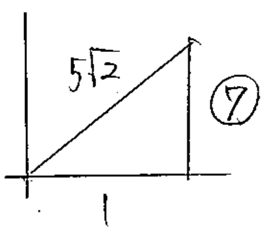


$\cos\angle BED = \frac{5+10-13}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}$

$= \frac{1}{\sqrt{50}}$

$= \frac{1}{5\sqrt{2}}$

(2) $\triangle BED$ の面積 S を求めよ。



$x^2+1^2 = (5\sqrt{2})^2$

$x^2 = 49$

$x = 7$

$\sin\angle BED = \frac{7}{5\sqrt{2}}$

よって

$S = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{7}{5\sqrt{2}}$

$= \frac{7}{2}$