

1 【接線の方程式】

次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ。

(1) $y = \frac{4}{x}$, $A(-1, -4)$

接線

傾き

$f'(x) = -\frac{4}{x^2}$

$f'(-1) = -4$

$y + 4 = -4(x + 1)$

$y = -4x - 8$

(2) $y = \tan x$, $A(0, 0)$

傾き

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$f'(0) = 1$

接線

$y = x$

2

曲線 $y = e^x$ について、次のような接線の方程式を求めよ。

(1) 傾きが 1 である

接点 (a, e^a)

接点 $(0, 1)$

接線

$y = x + 1$

傾き

$f'(x) = e^x$

$f'(a) = e^a = 1 \Rightarrow a = 0$

(2) 点 $(1, 0)$ を通る

接点 (a, e^a)

$(1, 0)$ を通る

傾き

$f'(a) = e^a$

$-e^a = e^a(1-a)$

$e^a(2-a) = 0$

$a = 2$

接線

$y = e^a - e^a(x-a)$

$y = e^2(x-2) + e^2$

$y = e^2x - e^2$

3

次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ。

(1) 楕円 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$, $A(-1, 2)$

$x + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{y}{4} = 0$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{y}$

\Rightarrow

$y - 2 = 2(x + 1)$

接点 $(-1, 2)$ における

接線の傾きは

$\frac{4}{2} = 2$

$y = 2x + 4$

(2) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$, $A(\sqrt{2}, -1)$

$2x - \frac{dy}{dx} \cdot 2y = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

\Rightarrow

$y + 1 = -\sqrt{2}(x - \sqrt{2})$

接点 $(\sqrt{2}, -1)$ における

接線の傾きは

$-\sqrt{2}$

$y = -\sqrt{2}x + 1$

4 【法線の方程式】

次の曲線上の点 A における法線の方程式を求めよ。

(1) $y = \frac{2}{x}$, $A(1, 2)$

傾き

$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$

$f'(1) = -2$

$\therefore \frac{1}{2}$

法線

$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

(2) $y = \sin x$, $A(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$

傾き

$f'(x) = \cos x$

$f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore -\frac{2}{\sqrt{3}}$

法線

$y - \frac{1}{2} = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{6})$

$y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$

5 【共通接線】

2つの曲線 $y = ax^2 + b$, $y = \log x$ が、点 $A(e, 1)$ を共有し、かつ点 A で共通な接線をもつように、定数 a, b の値を定めよ。

$A(e, 1)$ は $f(x)$ 上に取らん?

$1 = ae^2 + b$

$a = 1 - ae^2$ ①

$\therefore f(x) = ax^2 + 1 - ae^2$

$g(x) = \log x$

傾き

$f'(x) = 2ax$

$f'(e) = 2ae$

傾き

$g'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(e) = \frac{1}{e}$

$\therefore 2ae = \frac{1}{e}$

$2a = \frac{1}{e^2}$

$a = \frac{1}{2e^2}$

① \Rightarrow

$a = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

\Rightarrow

$a = \frac{1}{2e^2}, a = \frac{1}{2}$

6 【平均値の定理】

次の場合に、平均値の定理における c の値を求めよ。

$f(x) = x^3$, $a = -1$, $b = 2$

$\frac{f(2) - f(-1)}{2 + 1} = f'(c)$ ($-1 < c < 2$)

$\frac{8 + 1}{3} = 3c^2$

$c^2 = 1$

$\therefore c = 1$

7

平均値の定理を用いて、次のことを証明せよ。

$a < b$ のとき $e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$

$f(x) = e^x$ とおく

e^x は増加関数

$[a, b]$ 上で平均値の定理より

$e^a < e^c < e^b$

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

$e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$

$\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^c \quad (a < c < b)$

8 【関数の増減】

次の関数の増減を調べよ。

(1) $f(x) = x - e^x$

$f'(x) = 1 - e^x$

$f'(x) = 0$ のとき

$e^x = 1$

$x = 0$

x	...	0	...
f'	+	0	-
f	↗	-1	↘

$x \leq 0$ で増加

$0 \leq x$ で減少

(2) $f(x) = x - \log x \quad (x > 0)$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

$f'(x) = 0$ のとき

$\frac{1}{x} = 1$

$x = 1$

x	0	...	1	...
f'	↘	-	0	+
f	↘	↘	↘	↗

$0 < x \leq 1$ で減少

$1 \leq x$ で増加

(3) $f(x) = x + \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$

$f'(x) = 1 + \cos x$

$f'(x) = 0$ のとき

$\cos x = -1$

$x = \pi$

x	0	...	π
f'	↘	+	0
f	↘	↗	↘

常に増加

9 【関数の極大と極小】

次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 e^{-x}$

$f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x}$

$f'(x) = 0$ のとき

$e^{-x} (2x - x^2) = 0$

$e^{-x} x (2 - x) = 0$

$x = 0, 2$

x	...	0	...	2	...
f'	-	0	+	0	-
f	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘

極小値 0 ($x=0$)

極大値 $\frac{4}{e^2}$ ($x=2$)

(2) $f(x) = x \log x \quad (x > 0)$

$f'(x) = \log x + 1$

$f'(x) = 0$ のとき

$\log x = -1$

$x = \frac{1}{e}$

x	0	...	$\frac{1}{e}$...
f'	↘	-	0	+
f	↘	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

極小値 $-\frac{1}{e}$ ($x = \frac{1}{e}$)

(3) $f(x) = x + \frac{2}{x} \quad (x \neq 0)$

$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$

$f'(x) = 0$ のとき

$x = \pm \sqrt{2}$

x	...	$-\sqrt{2}$...	0	...	$\sqrt{2}$...
f'	+	0	-	↘	-	0	+
f	↗	$-2\sqrt{2}$	↘	↘	↘	$2\sqrt{2}$	↗

極大値 $-2\sqrt{2}$ ($x = -\sqrt{2}$)

極小値 $2\sqrt{2}$ ($x = \sqrt{2}$)

10

次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x) = |x|(x+1)$

i) $x > 0$ のとき

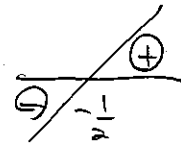
$f(x) = x(x+1)$

$= x^2 + x$

$f'(x) = 2x + 1$

$f'(x) = 0$ のとき

$x = -\frac{1}{2}$



i), ii) より

ii) $x < 0$ のとき

$f(x) = -x(x+1)$

$= -x^2 - x$

$f'(x) = -2x - 1$

$f'(x) = 0$ のとき

$x = -\frac{1}{2}$



x	...	$-\frac{1}{2}$...	0	...
f'	+	0	-	↘	+
f	↗	$\frac{1}{4}$	↘	1	↗

極大値 $\frac{1}{4}$ ($x = -\frac{1}{2}$)

極小値 1 ($x = 0$)

(2) $f(x) = |x|\sqrt{x+2}$

i) $x > 0$ のとき

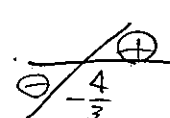
$f(x) = x\sqrt{x+2}$

$f'(x) = \sqrt{x+2} + \frac{x}{2\sqrt{x+2}}$

$= \frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}$ ($x \neq -2$)

$f'(x) = 0$ のとき

$x = -\frac{4}{3}$



ii) $x < 0$ のとき

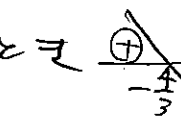
$f(x) = -x\sqrt{x+2}$

$f'(x) = -\sqrt{x+2} - \frac{x}{2\sqrt{x+2}}$

$= \frac{-3x-4}{2\sqrt{x+2}}$ ($x \neq -2$)

$f'(x) = 0$ のとき

$x = -\frac{4}{3}$



i), ii) より

x	-2	...	$-\frac{4}{3}$...	0	...
f'	↘	+	0	-	↘	+
f	0	↗	$\frac{4\sqrt{6}}{9}$	↘	0	↗

極大値 $\frac{4\sqrt{6}}{9}$ ($x = -\frac{4}{3}$)

極小値 0 ($x = 0$)

11

関数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ が $x=1$ で極値をとるように、定数 a の値を定めよ。また、このとき、関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

$$f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

x	...	1	...
f'	+	0	-
f	↗	↘	↗

$f(1) = 0$

$$f'(1) = 1 - a = 0$$

$$a = 1$$

x	...	-1	...	0	...	1	...
f'	+	0	-	↘	↗	0	+
f	↗	↘	↘	↘	↘	↗	↗

極大値 -2 ($x = -1$)

極小値 2 ($x = 1$)

逆に

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad a \neq \pm 1$$

$$x = \pm 1$$

12 【関数の最大と最小】

次の関数の最大値、最小値を求めよ。

(1) $y = (1 + \cos x) \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$)

$$f'(x) = (-\sin x) \sin x + (1 + \cos x) \cos x$$

$$= -\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x$$

x	...	$\frac{3\pi}{4}$...	$\frac{5\pi}{4}$...
f'	+	0	-	0	+
f	↗	↘	↘	↘	↗

$$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$$

$$f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \quad a \neq \pm 1$$

$$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\cos x = -1, \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

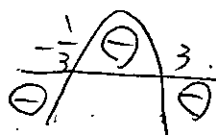
$$\text{Max } \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (x = \frac{\pi}{3})$$

$$\text{Min } -\frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (x = \frac{5\pi}{3})$$

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$...	π	...	$\frac{5\pi}{3}$...	2π
f'	+	0	-	0	-	0	+	+	+
f	↗	↗	↘	↘	↘	↘	↗	↗	↗

(2) $y = \frac{4-3x}{x^2+1}$ ($1 \leq x \leq 4$)

$$f'(x) = \frac{-3(x^2+1) - (4-3x) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$



$$f'(x) = 0 \quad a \neq \pm 1$$

$$-3x^2 - 3 - 8x + 6x^2 = 0$$

$$3x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$(3x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}, 3$$

x	1	...	3	...	4
f'	-	+	-	+	-
f	↘	↘	↗	↗	↘

$$\text{Max } \frac{1}{2} \quad (x = 1)$$

$$\text{Min } -\frac{1}{2} \quad (x = 3)$$

$$f(4) = \frac{-8}{17}$$

13 【関数のグラフ】

次の関数の凹凸を調べよ。また、変曲点があればその座標を求めよ。

(1) $y = x^4 + 2x^3 + 1$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12x$$

$$f''(x) = 0 \quad a \neq \pm 1$$

$$x(x+1) = 0$$

$$x = 0, -1$$

x	...	-1	...	0	...
f''	+	0	-	0	+
f	↖	↖	↘	↘	↖

変曲点

$$\underline{(-1, 0) \quad (0, 1)}$$

(2) $y = xe^{-x}$

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$$

$$= e^{-x}(1-x)$$

$$f''(x) = -e^{-x}(1-x) - e^{-x}$$

$$= -e^{-x}(2-x)$$

x	...	2	...
f''	-	0	+
f	↘	↘	↖

変曲点

$$\underline{(2, \frac{2}{e^2})}$$

$$f''(x) = 0 \quad a \neq \pm 1$$

$$x = 2$$

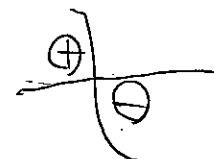
(3) $y = x - \cos x$ ($0 < x < \pi$)

$$f'(x) = 1 + \sin x$$

$$f''(x) = \cos x$$

$$f''(x) = 0 \quad a \neq \pm 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$



x	0	...	$\frac{\pi}{2}$...	π
f''	+	0	-	-	+
f	↖	↖	↘	↘	↖

変曲点

$$\underline{(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$$

(4) $y = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x$

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 12x + 4$$

$$f''(x) = -12x^2 + 24x - 12$$

$$f''(x) = 0 \quad a \neq \pm 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1 \quad (\text{重解})$$

x	...	1	...
f''	-	0	-
f	↘	↘	↘

変曲点なし

14

関数 $y=e^{-2x^2}$ の増減, グラフの凹凸, 漸近線を調べて, グラフの概形をかけ。

$$f'(x) = (-2x^2)' e^{-2x^2} = -4x e^{-2x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad x = \pm 0$$

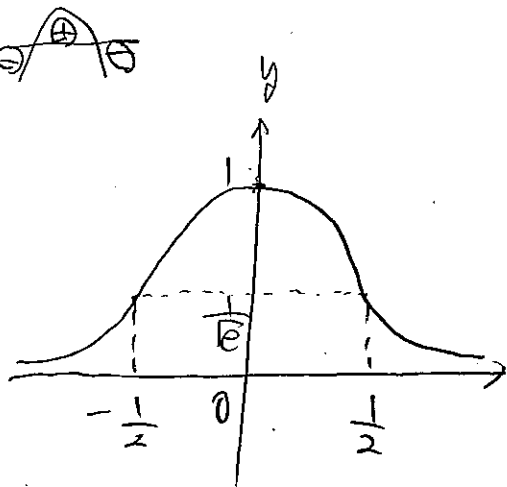
$$f''(x) = -4e^{-2x^2} - 4x(-2x^2)' e^{-2x^2} = -4e^{-2x^2} + 16x^2 e^{-2x^2} = -4e^{-2x^2}(1-4x^2)$$

$$f''(x) = 0 \quad x = \pm \frac{1}{2}$$

$$4x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
f'	+	0	-
f''	+	-	+
f	\nearrow	\downarrow	\searrow



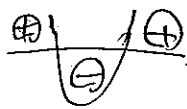
15

関数 $y = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$ のグラフの概形をかけ。

$$f(x) = \frac{4}{x+1} + x - 2 \quad (x \neq -1)$$

漸近線

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = x - 2 \end{cases}$$



x	$-\frac{3}{2}$	-1	1
f'	+	0	+
f''	-	-	+
f	\nearrow	\downarrow	\nearrow

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1) - (x^2-x+2)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$x = -3, 1$$

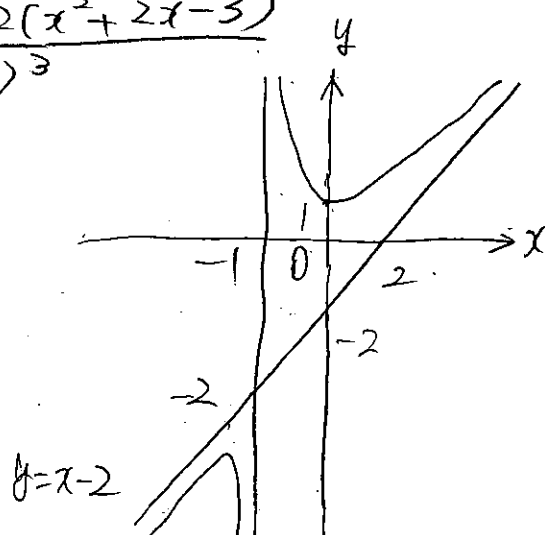
$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x-3)2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2(x^2+2x+1) - 2(x^2+2x-3)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{8}{(x+1)^3}$$

$$f(-3) = -2 - 3 - 2 = -7$$

$$f(1) = 1$$



16

次の関数の極値を, 第2次導関数を利用して求めよ。

(1) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x$$

$$f'(x) = 0 \quad x \neq 0$$

$$x^3 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0$$

$$x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12$$

$$f''(-\sqrt{3}) > 0$$

$$f''(0) < 0$$

$$f''(\sqrt{3}) > 0$$

$$f(\pm\sqrt{3}) = 9 - 18 + 5 = -4$$

$$f(0) = 5$$

∴ 極大値 5 ($x=0$)

極小値 -4 ($x=\pm\sqrt{3}$)

(2) $f(x) = x + 2\sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

$$f'(x) = 1 + 2\cos x$$

$$f'(x) = 0 \quad x \neq \pi$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{2}{3}\pi + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$$

$$f''(x) = -2\sin x$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\pi\right) < 0$$

$$f''\left(\frac{4}{3}\pi\right) > 0 \quad \therefore \text{極大値 } \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \quad (x = \frac{2}{3}\pi)$$

$$\text{極小値 } \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \quad (x = \frac{4}{3}\pi)$$

17 【不等式の証明】

$x > 0$ のとき, 次の不等式を証明せよ。

(1) $\log(x+1) < x$

$$f(x) = x - \log(x+1)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{x}{x+1} > 0$$

$f(x)$ は単調増加 $f'(x) > 0$

$$\min = f(0) = 0$$

$$x > 0$$

$$\log(x+1) < x$$

(2) $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

$$f(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$$

$$f'(x) = e^x - 1 - x$$

$$f''(x) = e^x - 1 > 0 \quad x > 0$$

$f'(x)$ は単調増加

$$f'(0) = 2 > 0 \quad \therefore$$

$f(x)$ は単調増加

$$\min = f(0) = 0$$

$$x > 0$$

$$e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

18 【方程式の実数解の個数】

a は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1) $\frac{x^3}{x-1} = a$

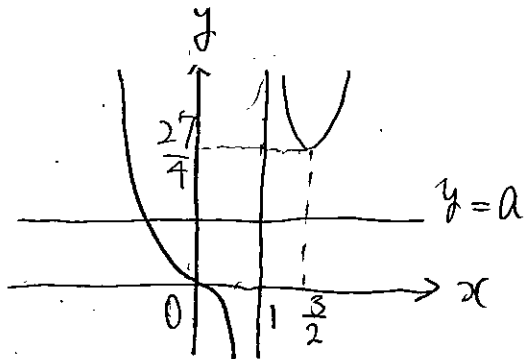
$f(x) = \frac{x^3}{x-1} \quad (x \neq 1)$

$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2}$

$= \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}$
 $= \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$

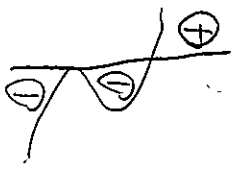
x	...	0	...	1	...	$\frac{3}{2}$...
f'	-	0	-	+	-	0	+
f	\searrow	0	\searrow	\searrow	\searrow	$\frac{27}{4}$	\nearrow

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{27}{8}}{\frac{3}{2}-1} = \frac{27}{8} \times \frac{2}{1} = \frac{27}{4}$



- $a < \frac{27}{4}$ $a \neq 0$ 1個
- $a = \frac{27}{4}$ $a \neq 0$ 2個
- $a > \frac{27}{4}$ $a \neq 0$ 3個

$f'(x) = 0 \quad a \neq 0$
 $x^2(2x-3) = 0$
 $x = 0$ (重解), $\frac{3}{2}$



(2) $xe^x - a = 0$

$f(x) = xe^x$

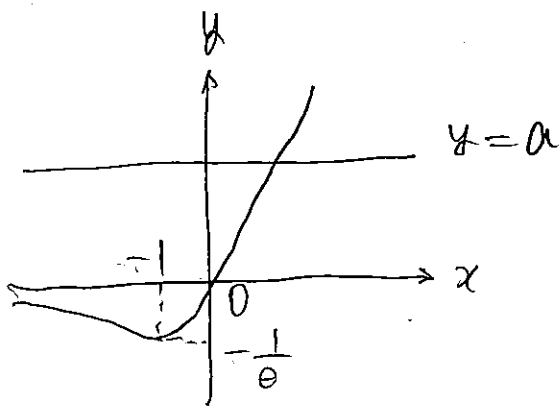
$f'(x) = e^x + xe^x$

$f'(x) = 0 \quad a \neq 0$

$e^x(1+x) = 0$

$x = -1$

x	...	-1	...
f'	-	0	+
f	\searrow	$-\frac{1}{e}$	\nearrow



- $a < -\frac{1}{e}$ $a \neq 0$ 0個
- $a = -\frac{1}{e}$ $a \neq 0$ 1個
- $-\frac{1}{e} < a < 0$ $a \neq 0$ 2個
- $0 \leq a$ $a \neq 0$ 1個

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

19 【速度と加速度】

地上から、初速度 v_0 m/s でボールを真上に打ち上げるとき、 t 秒後の高さ x m は、

$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ で与えられている。ただし、 g は定数とする。 t 秒後におけるボールの速度 v m/s と

加速度 a m/s² を求めよ。

$v = \frac{dx}{dt} = v_0 - gt \quad (\text{m/s})$

$a = \frac{dv}{dt} = -g \quad (\text{m/s}^2)$

20

時刻 t における点 P の座標 (x, y) が次の式で与えられるとき、 $t=3$ における P の速さ、加速度の大きさを求めよ。

(1) $x = 2t + 1, y = t^2 - 4t$

$\frac{dx}{dt} = 2$

$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

$\frac{dy}{dt} = 2t - 4$

$\frac{d^2y}{dt^2} = 2$

$t=3$ のとき

$\vec{v} = (2, 2)$

$|\vec{v}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$\vec{a} = (0, 2)$

$|\vec{a}| = \sqrt{4} = 2$

(2) $x = 2\cos \pi t, y = 2\sin \pi t$

$\frac{dx}{dt} = -2\pi \sin \pi t$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\pi^2 \cos \pi t$

$\frac{dy}{dt} = 2\pi \cos \pi t$

$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\pi \sin \pi t$

$t=3$ のとき

$\vec{v} = (0, -2\pi)$

$t=3$ のとき

$\vec{a} = (2\pi^2, 0)$

$|\vec{v}| = \sqrt{0+4\pi^2} = 2\pi$

$|\vec{a}| = 2\pi^2$

21 【近似式】

$h \neq 0$ のとき、次の関数の値について、1次の近似式を作れ。

(1) $\cos(a+h)$

$\cos(a+h) \approx \cos a - h \sin a$

(2) $\tan(a+h)$

$\tan(a+h) \approx \tan a + \frac{h}{\cos^2 a}$

22

$x \neq 0$ のとき、次の関数について、1次の近似式を作れ。

(1) e^x

$e^x \approx 1+x$

(2) $\log(1+x)$

$\log(1+x) \approx x$

(3) $\frac{1}{1+x}$

$\frac{1}{1+x} \approx 1-x$

23

1次の近似式を用いて、次の値の近似値を求めよ。

(1) $\sqrt[4]{1.03}$

$= (1+0.03)^{\frac{1}{4}}$

$\approx 1 + \frac{1}{4} \cdot 0.03$

$= 1.0075$

(2) $\log 1.01$

$= \log(1+0.01)$

≈ 0.01

(3) $\frac{1}{0.998}$

$= \frac{1}{1+(-0.002)} \approx 1+0.002$

$= 1.002$