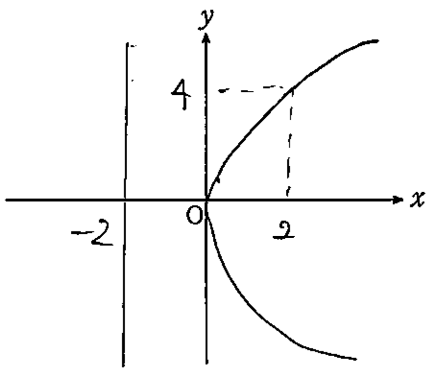
1 【放物線】

次の放物線の概形をかけ。また，その焦点と準線を求めよ。

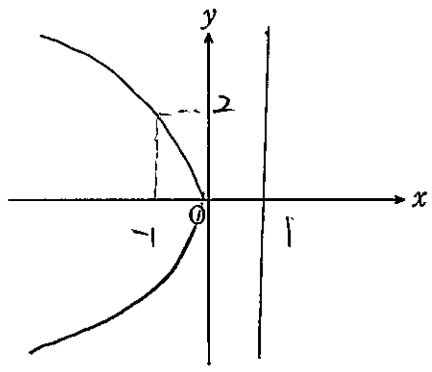
(1) $y^2=8x$　　$y^2=4\cdot2x$



焦点 (2 , 0)

準線 $x=-2$

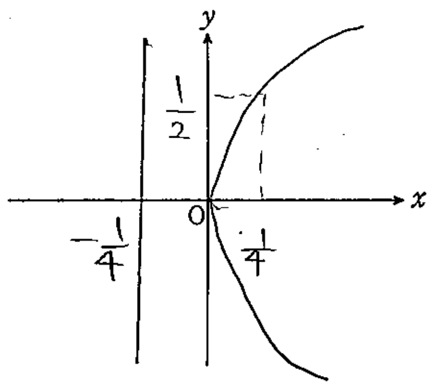
(2) $y^2=-4x$　　$y^2=4(-1)x$



焦点 (−1 , 0)

準線 $x=1$

(3) $y^2=x$　　$y^2=4\left(\frac{1}{4}\right)x$



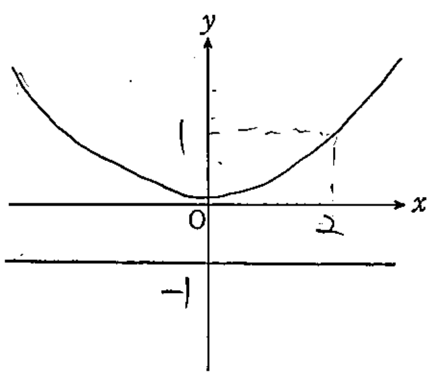
焦点 ($\frac{1}{4}$, 0)

準線 $x=-\frac{1}{4}$

2

次の放物線の概形をかけ。また，その焦点と準線を求めよ。

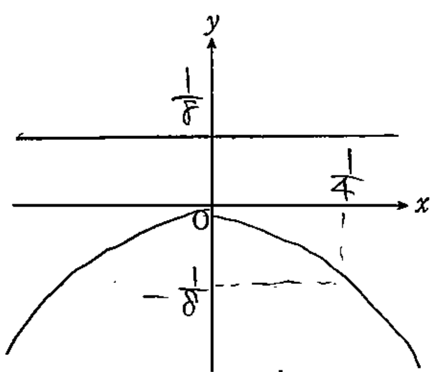
(1) $x^2=4y$



焦点 (0 , 1)

準線 $y=-1$

(2) $y=-2x^2$　　$x^2=-\frac{1}{2}y$　　$x^2=4\left(-\frac{1}{8}\right)y$



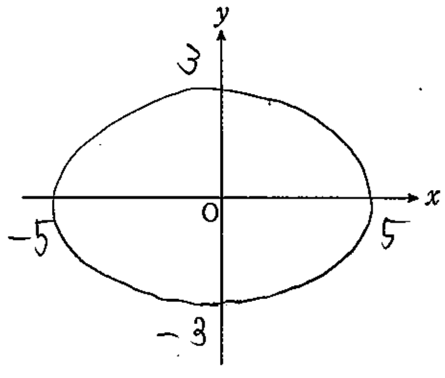
焦点 (0 , $-\frac{1}{8}$)

準線 $y=\frac{1}{8}$

3 【楕円】

次の楕円の概形をかけ。また，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

(1) $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$　　$\sqrt{25-9}=4$

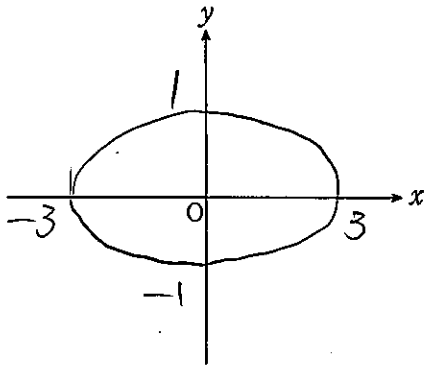


焦点 (4 , 0) (−4 , 0)

長軸の長さ　10

短軸の長さ　6

(2) $\frac{x^2}{9}+y^2=1$　　$\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$

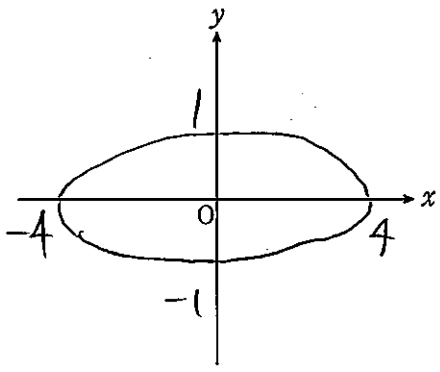


焦点 ($2\sqrt{2}$, 0) ($-2\sqrt{2}$, 0)

長軸の長さ　6

短軸の長さ　2

(3) $x^2+16y^2=16$　　$\frac{x^2}{16}+y^2=1$　　$\sqrt{16-1}=\sqrt{15}$



焦点 ($\sqrt{15}$, 0) ($-\sqrt{15}$, 0)

長軸の長さ　8

短軸の長さ　2

4

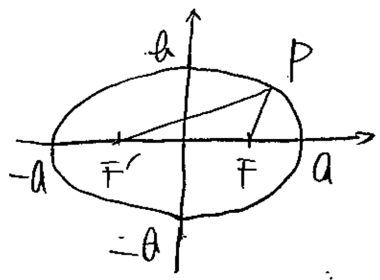
次の２次曲線の方程式を求めよ。

(1) 焦点が点 $(-2,\ 0)$ で，準線が直線 $x=2$

$y^2=4(-2)x$

$y^2=-8x$

(2) 2点 $(\sqrt{3},\ 0)$, $(-\sqrt{3},\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 4



$\begin{cases} a^2-b^2=3 & (焦点) \\ 2a=4 & (距離の和) \end{cases}$

$a=2,\quad b=1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　　$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(3) 2点 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ を焦点とし，長軸の長さが 6

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\begin{cases} a^2-b^2=4 & (焦点) \\ 2a=6 & (長軸) \end{cases}$

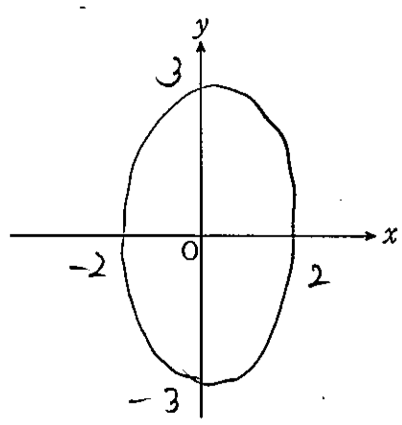
$a=3\quad b=\sqrt{5}$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

5

次の楕円の概形をかけ。また，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

(1) $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$　　$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

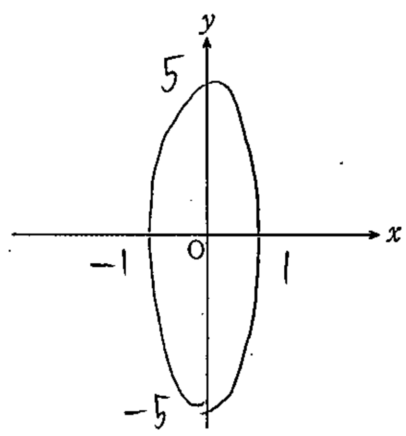


焦点 (0 , $\sqrt{5}$) (0 , $-\sqrt{5}$)

長軸の長さ　6

短軸の長さ　4

(2) $x^2+\frac{y^2}{25}=1$　　$\sqrt{25-1}=2\sqrt{6}$



焦点 (0 , $2\sqrt{6}$) (0 , $-2\sqrt{6}$)

長軸の長さ　2

短軸の長さ　10

6

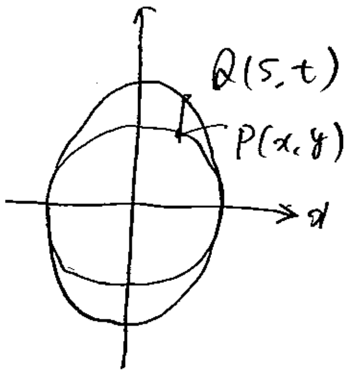
円 $x^2+y^2=2^2$ を，次のように拡大または縮小して得られる楕円の方程式を求めよ。

(1)　x 軸をもとにして y 軸方向に $\frac{3}{2}$ 倍

$\begin{cases} x = s \\ y = \frac{3}{2}t \end{cases}$ とおくと $\begin{cases} s = x \\ t = \frac{2}{3}y \end{cases}$

$s^2+t^2=4$

$x^2+\frac{4}{9}y^2=4$　∴ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ //



(2)　y 軸をもとにして x 軸方向に 2 倍

$\begin{cases} x = 2s \\ y = t \end{cases}$ とおくと $\begin{cases} s = \frac{1}{2}x \\ t = y \end{cases}$

$s^2+t^2=4$

$\frac{x^2}{4}+y^2=4$　∴ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ //

7

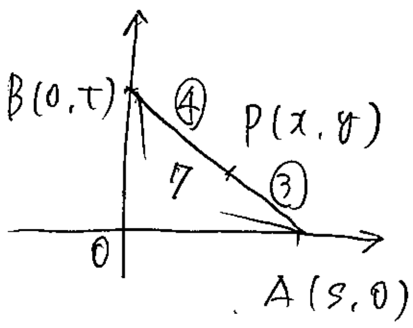
座標平面上において，長さ 7 の線分 AB の端点 A は x 軸上を，端点 B は y 軸上を動くとき，線分 AB を 3 : 4 に内分する点 P の軌跡を求めよ。

A(s, 0)　B(0, t), P(x, y)

とおくと.

AB = 7 より

$s^2+t^2=49$ —①



$\begin{cases} x = \frac{4}{7}s \\ y = \frac{3}{7}t \end{cases}$　$\begin{cases} s = \frac{7}{4}x \\ t = \frac{7}{3}y \end{cases}$

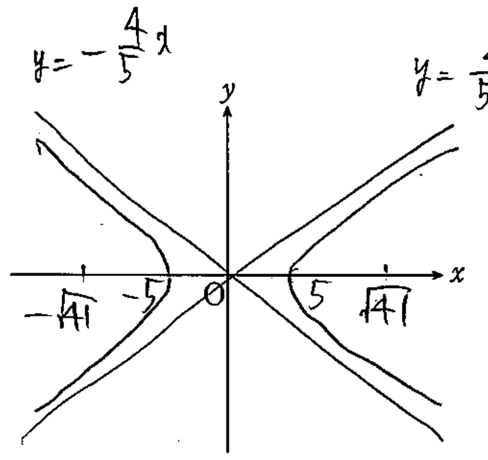
①に代入

$\frac{49}{16}x^2+\frac{49}{9}y^2=49$　∴ 楕円 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ //

8【双曲線】

その双曲線の概形をかけ。また，そのの焦点，頂点，漸近線を求めよ。

(1)　$\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$　$\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$

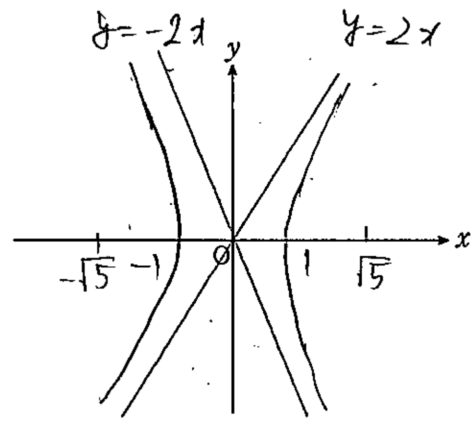


焦点 (√41 , 0) (−√41 , 0)

頂点 (5 , 0) (−5 , 0)

漸近線　$y=\pm\frac{4}{5}x$

(2)　$x^2-\frac{y^2}{4}=1$　$\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

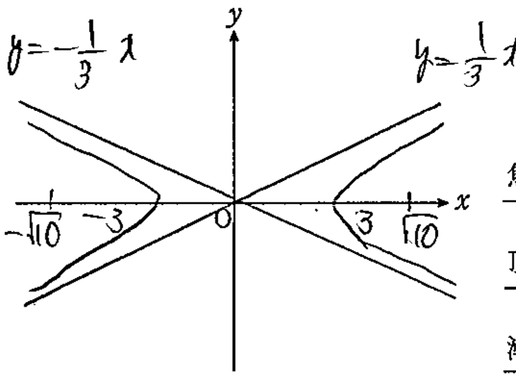


焦点 (√5 , 0) (−√5 , 0)

頂点 (1 , 0) (−1 , 0)

漸近線　$y=\pm 2x$

(3)　$x^2-9y^2=9$



焦点 (√10 , 0) (−√10 , 0)

頂点 (3 , 0) (−3 , 0)

漸近線　$y=\pm\frac{1}{3}x$

9

2 点 (5, 0), (−5, 0) を焦点とし，焦点からの距離の差が 8 である双曲線の方程式を求めよ。

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\begin{cases} a^2+b^2=25 & \text{(焦点)} \\ 2a=8 & \text{(距離の差)} \end{cases}$

$a=4$, $b=3$

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ //

10

2 点 (2, 0), (−2, 0) を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ。

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$

$a^2+a^2=4$ (焦点)

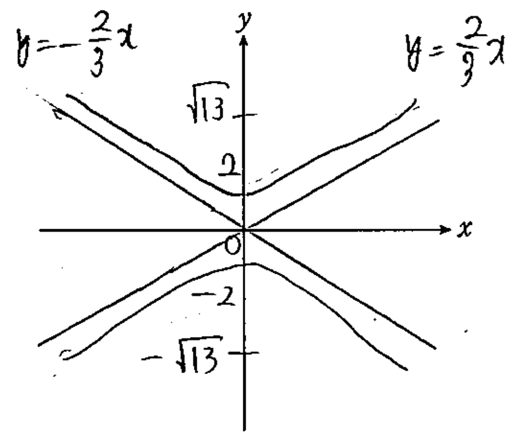
$a=\sqrt{2}$

$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ //

11

その双曲線の概形をかけ。また，そのの焦点，頂点，漸近線を求めよ。

(1)　$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=-1$　$\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

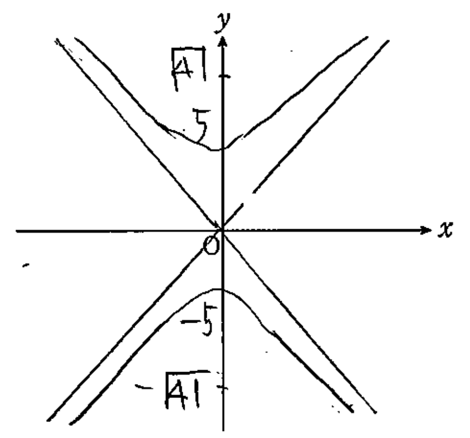


焦点 (0 , √13) (0 , −√13)

頂点 (0 , 2) (0 , −2)

漸近線　$y=\pm\frac{2}{3}x$

(2)　$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=-1$　$\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$



焦点 (0 , √41) (0 , −√41)

頂点 (0 , 5) (0 , −5)

漸近線　$y=\pm\frac{5}{4}x$

12【平行移動】

楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ を，x 軸方向に 3，y 軸方向に −2 だけ平行移動するとき，移動後の楕円の方程式と焦点の座標を求めよ。

方程式

$\frac{(x-3)^2}{4}+(y+2)^2=1$ //

焦点

$(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$

↓ $x \to 3$, $y \to -2$

$(\sqrt{3}+3, -2)$, $(-\sqrt{3}+3, -2)$ //

13

放物線 $y^2=4x$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に2だけ平行移動するとき，移動後の放物線の方程式と焦点の座標を求めよ。

方程式

$(y-2)^2=4(x+1)$

焦点 $x\to -1$

$(1,0)\xrightarrow{y\to 2}(0,2)$

14

次の方程式はどのような図形を表すか。

(1) $x^2+4y^2+6x-8y+9=0$

$(x+3)^2-9+4(y^2-2y)+9=0$

$\frac{(x+3)^2}{4}+(y-1)^2-1=0$

楕円 $\frac{(x+3)^2}{4}+(y-1)^2=1$

(2) $y^2+8y-16x=0$

$y^2+8y+16=16x+16$

放物線 $(y+4)^2=16(x+1)$

(3) $4x^2-9y^2-16x-36y-56=0$

$4(x^2-4x)-9(y^2+4y)=56$

$4(x-2)^2-16-9(y+2)^2+36=56$

$4(x-2)^2-9(y+2)^2=36$

双曲線 $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$

15【2次曲線と直線】

k は定数とする。双曲線 $x^2-2y^2=4$ と直線 $y=x+k$ の共有点の個数を求めよ。

$x^2-2(x+k)^2=4$

$x^2-2(x^2+2k+k^2)=4$

$x^2+4k+2k^2+4=0$

$D/4=(2k)^2-(2k^2+4)$

$=2(k^2-2)$

$D/4>0$ $k^2>2$

$k<-2,\ 2<k$ のとき 2コ

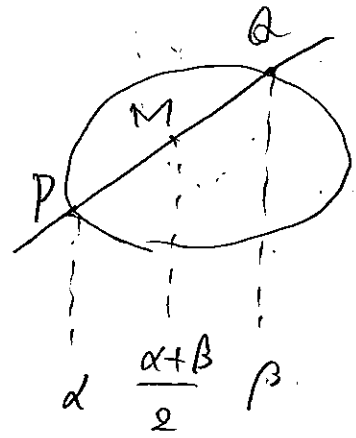
$D/4=0$ $k=0$ のとき 1コ

$D/4<0$ $-2<k<2$ のとき 0コ

16

楕円 $x^2+4y^2=4$ と直線 $y=x+2$ の2つの交点をP，Qとするとき，線分PQの中点Mの座標を求めよ。①②

②を①に代入



$x^2+4(x+2)^2=4$

$x^2+4(x^2+4x+4)=4$

$5x^2+16x+12=0$

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\frac{16}{5}$

中点Mのx座標 $=\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{8}{5}$

②に代入

$y=-\frac{8}{5}+2=\frac{2}{5}$ $M\left(-\frac{8}{5},\frac{2}{5}\right)$

17【2次曲線の接線の方程式】

次の曲線上の点Pにおける接線の方程式を求めよ。

(1) 放物線 $y^2=4x$，P(1, 2)

$2y=2(x+1)$

$y=x+1$

(2) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$，P(3, 1)

$\frac{3x}{12}+\frac{y}{4}=1$

$x+y=4$

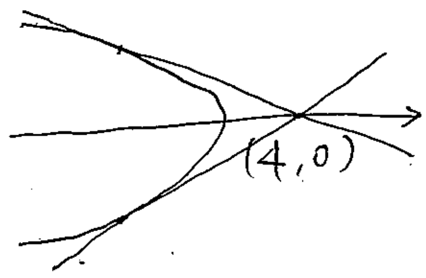
$y=-x+4$

18

点C(4, 0)から放物線 $y^2=-4x$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。①②

接線 $y=m(x-4)$ とおく。$(m\neq 0)$

②を①に代入



$m^2(x-4)^2=-4x$

$m^2(x^2-8x+16)=-4x$

$m^2x^2+(4-8m^2)x+16m^2=0$

$D/4=(2-4m^2)^2-16m^4=0$

$4-16m^2=0$

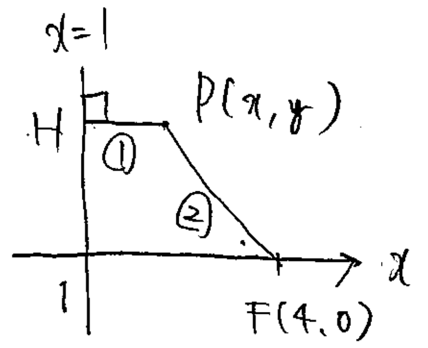
$m=\pm\frac{1}{2}$

$m=\frac{1}{2}$ のとき 接線 $y=\frac{1}{2}(x-4)$

$m=-\frac{1}{2}$ のとき 接線 $y=-\frac{1}{2}(x-4)$

$\boxed{19}$ 【離心率】

点 F(4, 0) からの距離と，直線 $x=1$ からの距離の比が 2 : 1 である点 P の軌跡を求めよ。



$PF : PH = 2 : 1$

$4PH^2 = PF^2$

$4(x-1)^2 = (x-4)^2 + y^2$

$4(x^2-2x+1) = x^2 - 8x + 16 + y^2$

$3x^2 - y^2 = 12$

双曲線　$x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 4$

$\boxed{20}$ 【媒介変数表示】

媒介変数表示される次の曲線について，t を消去して x, y の方程式を求めよ。

(1)　$x=t+1$，$y=t^2+4t$　— ②

$t = x-1$　— ①

①②より

$y = (x-1)^2 + 4(x-1)$　　$y = x^2 + 2x - 3$

(2)　$x=2t$，$y=2t-t^2$　— ②

$t = \frac{1}{2}x$　— ①

①②より

$y = x - \frac{1}{4}x^2$　　$y = -\frac{1}{4}x^2 + x$

$\boxed{21}$

放物線 $y=-x^2+4tx+2t$ の頂点は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか。

$y = -(x^2 - 4tx) + 2t$

$= -\{(x-2t)^2 - 4t^2\} + 2t$

$= -(x-2t)^2 + 4t^2 + 2t$

$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t^2 + 2t \end{cases}$　— ②

$t = \frac{1}{2}x$　— ①

①②より　$y = x^2 + x$

$\boxed{22}$

角 θ を媒介変数として，次の楕円を表せ。

(1)　$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$

$x = 3\cos\theta$

$y = 2\sin\theta$

(2)　$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$

$x = 4\cos\theta$

$y = 5\sin\theta$

$\boxed{23}$

θ が変化するとき，点 $P\left(\dfrac{3}{\cos\theta},\ 2\tan\theta\right)$ は双曲線 $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$ 上を動くことを示せ。

$x = \dfrac{3}{\cos\theta}$，$y = 2\tan\theta$

$(左辺) = \dfrac{9}{9\cos^2\theta} - \dfrac{4\tan^2\theta}{4}$

$= \dfrac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= 1 = (右辺)$

$\boxed{24}$

角 θ を媒介変数として，次の双曲線を表せ。

(1)　$\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$

$x = \dfrac{5}{\cos\theta}$

$y = 4\sin\theta$

(2)　$\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=-1$

$x = 4\tan\theta$

$y = \dfrac{3}{\cos\theta}$

$\boxed{25}$

次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

(1)　$x=3\cos\theta+2$，$y=3\sin\theta-1$

$\cos\theta = \dfrac{x-2}{3}$，$\sin\theta = \dfrac{y+1}{3}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\dfrac{(y+1)^2}{9} + \dfrac{(x-2)^2}{9} = 1$

円　$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$

(2)　$x=3\cos\theta+1$，$y=2\sin\theta+3$

$\cos\theta = \dfrac{x-1}{3}$，$\sin\theta = \dfrac{y-3}{2}$

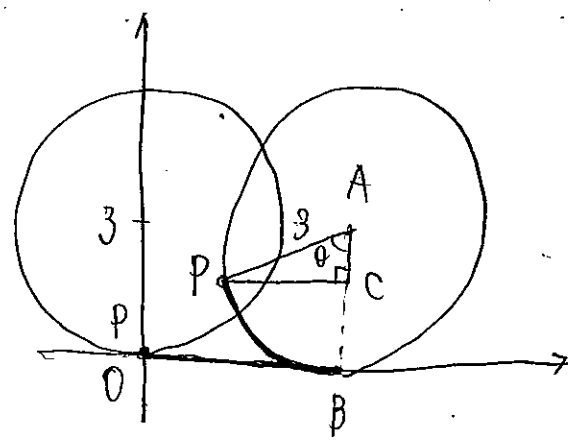
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\dfrac{(y-3)^2}{4} + \dfrac{(x-1)^2}{9} = 1$

楕円　$\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{4} = 1$

26【サイクロイド】

半径 3 の円が x 軸上をすべることなく回転していくとき，円上の定点 P の描くサイクロイドの媒介変数表示を求めよ。ただし，点 P の最初の位置を原点 O，円の中心の最初の位置を点 $(0,\ 3)$ とする。



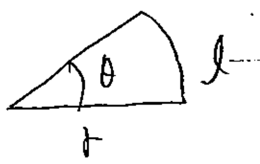
$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}}$

$\overrightarrow{OA}$ を求める

$OB = \overset{\frown}{BP} = 3\theta$

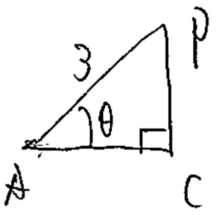
$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3\theta \\ 3 \end{pmatrix}$

弧の長さ



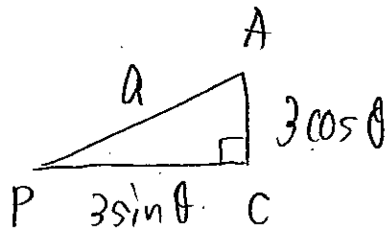
$l = r\theta$

$\overrightarrow{AP}$ を求める



$AC = 3\cos\theta$

$PC = 3\sin\theta$



$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -3\sin\theta \\ -3\cos\theta \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3\theta \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3\sin\theta \\ -3\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\theta - 3\sin\theta \\ 3 - 3\cos\theta \end{pmatrix}$

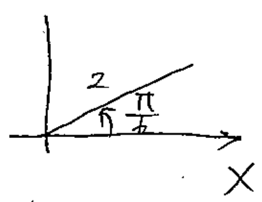
よって　$x = 3(\theta - \sin\theta)$

$y = 3(1 - \cos\theta)$ //

27【極座標と直交座標】

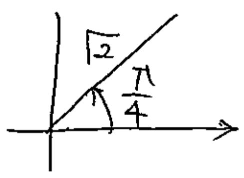
極座標が次のような点の直交座標を求めよ。

(1)　$\left(2,\ \frac{\pi}{6}\right)$



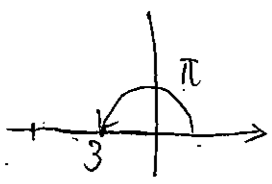
$(\sqrt{3},\ 1)$ //

(2)　$\left(\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$



$(\sqrt{2},\ 1)$ //

(3)　$(3,\ \pi)$

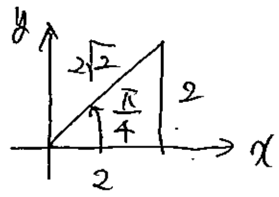


$(-3,\ 0)$ //

28

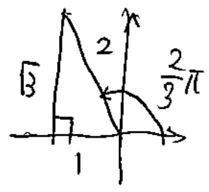
直交座標が次のような点の極座標を求めよ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とする。

(1)　$(2,\ 2)$



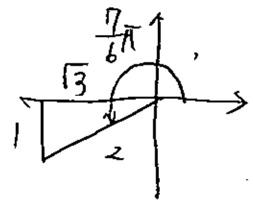
$\left(2\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$ //

(2)　$(-1,\ \sqrt{3})$



$\left(2,\ \frac{2}{3}\pi\right)$ //

(3)　$(-\sqrt{3},\ -1)$

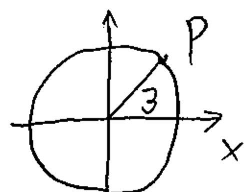


$\left(2,\ \frac{7}{6}\pi\right)$ //

29【極方程式】

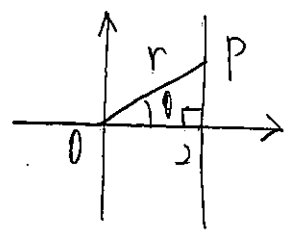
極座標に関して，次の円や直線の極方程式を求めよ。

(1)　極 O を中心とする半径 3 の円



$r = 3$ //

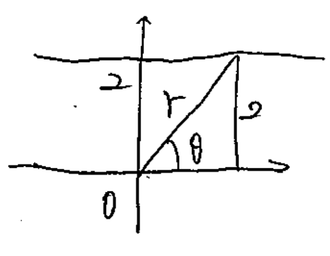
(2)　点 $(2,\ 0)$ を通り，始線に垂直な直線



$\cos\theta = \frac{2}{r}$

$r = \frac{2}{\cos\theta}$ //

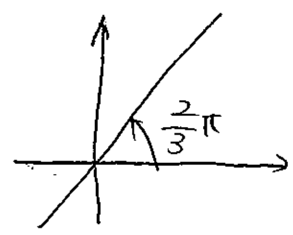
(3)　点 $\left(2,\ \frac{\pi}{2}\right)$ を通り，始線に平行な直線



$\sin\theta = \frac{2}{r}$

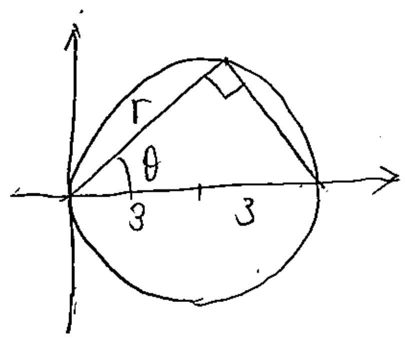
$r = \frac{2}{\sin\theta}$ //

(4)　極 O を通り，始線 OX となす角が $\frac{2}{3}\pi$ の直線



$\theta = \frac{2}{3}\pi$ //

(5)　中心 A の極座標が $(3,\ 0)$ である半径 3 の円

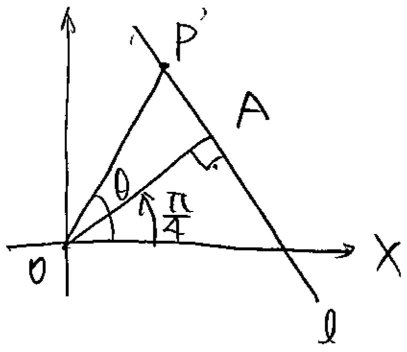


$\cos\theta = \frac{r}{6}$

$r = 6\cos\theta$ //

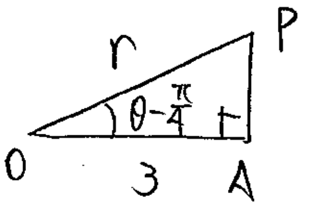
30

O を極とする。極座標が $\left(3,\ \frac{\pi}{4}\right)$ である点 A を通り，OA に垂直な直線 ℓ の極方程式を求めよ。



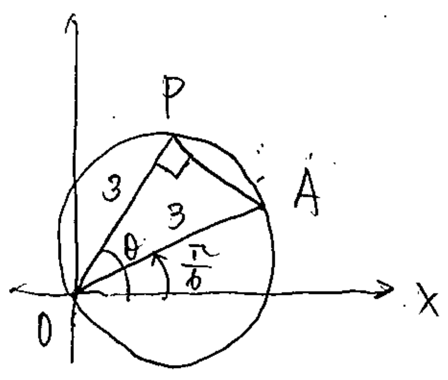
$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{r}$$

$$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=3$$

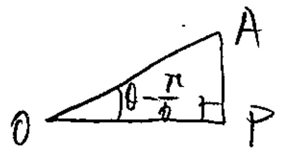


31

中心の極座標が $\left(3,\ \frac{\pi}{6}\right)$，半径 3 である円の極方程式を求めよ。



$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{r}{6}$$



$$r=6\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

32 【直交座標と極方程式】

楕円 $x^2+2y^2=4$ を極方程式で表せ。

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおく

$$r^2\cos^2\theta+2r^2\sin^2\theta=4$$

$$r^2(\cos^2\theta+2\sin^2\theta)=4$$

$$r^2(1+\sin^2\theta)=4$$

33

次の極方程式の表す曲線を，直交座標の x，y の方程式で表せ。

(1) $r=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$

$$r(\sin\theta+\cos\theta)=1$$

$$y+x=1$$

$$x+y-1=0$$

(2) $r=2\sin\theta$

$$r^2=2r\sin\theta$$

$$x^2+y^2=2x$$

$$x^2-2x+y^2=0$$

(3) $r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2$

$$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)=2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}x=2$$

$$x+\sqrt{3}y-4=0$$

(4) $r=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$

$$r(1+\cos\theta)=1$$

$$\sqrt{x^2+y^2}+x=1$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=1-x$$

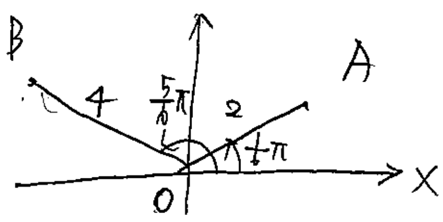
$$x^2+y^2=1-2x+x^2$$

$$y^2=-2x+1$$

34

点 A，B の極座標を，それぞれ $\left(2,\ \frac{\pi}{6}\right)$，$\left(4,\ \frac{5}{6}\pi\right)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 2 点 A，B 間の距離 AB を求めよ。



$$AB^2=20+8$$

$$=28$$

$$AB=2\sqrt{7}$$

$AB^2=16+4-2\cdot4\cdot2\cos\frac{4}{6}\pi$ （余弦）

(2) 2 点 A，B を通る直線の極方程式を求めよ。

直交座標で表すと

A$(\sqrt{3},1)$

B$(-2\sqrt{3},2)$

直線ABを求める

傾き $\dfrac{1-2}{\sqrt{3}+2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

$$y-1=-\frac{\sqrt{3}}{9}(x-\sqrt{3})$$

$$9y=-\sqrt{3}x+3+1$$

$$\sqrt{3}x+9y=4$$

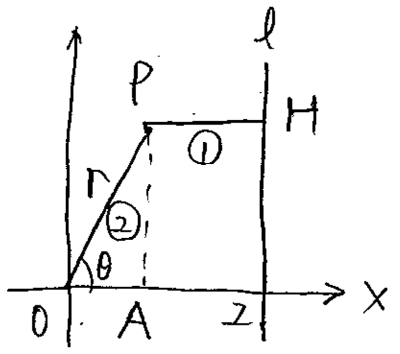
$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$ とおくと

$$r(\sqrt{3}\cos\theta+9\sin\theta)=4$$

35

始線 OX 上の点 A$(2,\ 0)$ を通り，始線に垂直な直線を ℓ とする。点 P$(r,\ \theta)$ から ℓ に下ろした垂線を PH とするとき，$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}=\dfrac{1}{2}$ であるような P の軌跡を，極方程式で表せ。



$$\frac{OP}{PH}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{r}{2-r\cos\theta}=\frac{1}{2}$$

$$2r=2-r\cos\theta$$

$$(2+\cos\theta)r=2$$

$$r=\frac{2}{2+\cos\theta}$$

$OP=r$

$PH=2-OA$

$\quad=2-r\cos\theta$