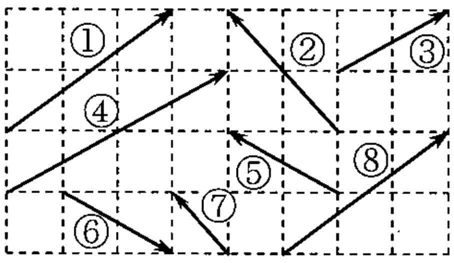
【等しいベクトル】

1 右の図に示されたベクトルについて，次のようなベクトルの番号の組をすべてあげよ。



(1) 向きが同じベクトル

①と⑧，②と⑦，③と④

(2) 互いに等しいベクトル

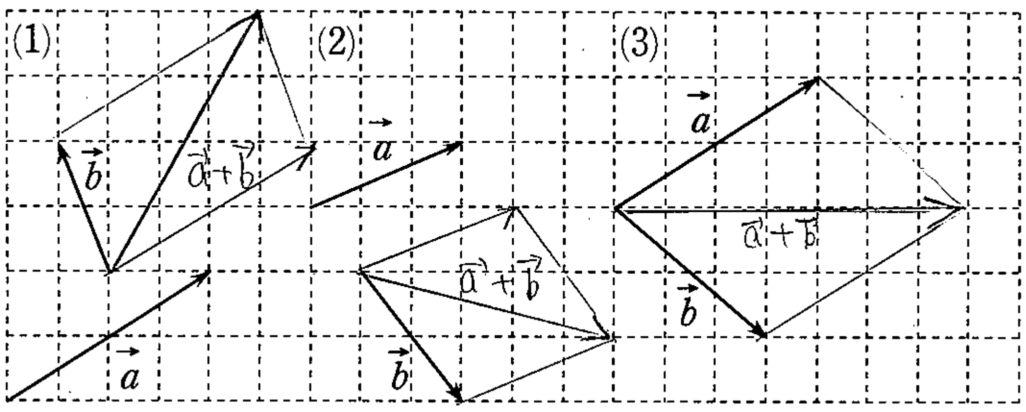
①と⑧

(3) 互いに逆ベクトル

⑤と⑥

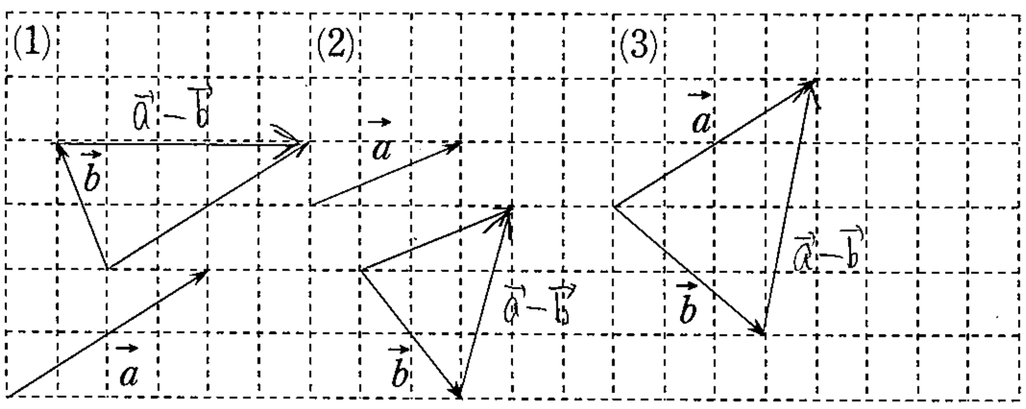
【ベクトルの加法】

2 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ をそれぞれ図示せよ。



【ベクトルの減法】

3 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}-\vec{b}$ をそれぞれ図示せよ。



【ベクトルの等式の証明】

4 次の等式が成り立つことを示せ。

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}$

(左辺) $= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}$

$= \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{CD}$

$=$ (右辺)

よって (左辺) = (右辺)

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

(左辺) $= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$

$= \overrightarrow{AA}$

$= \vec{0}$

$=$ (右辺)

よって (左辺) = (右辺)

【ベクトルの実数倍】

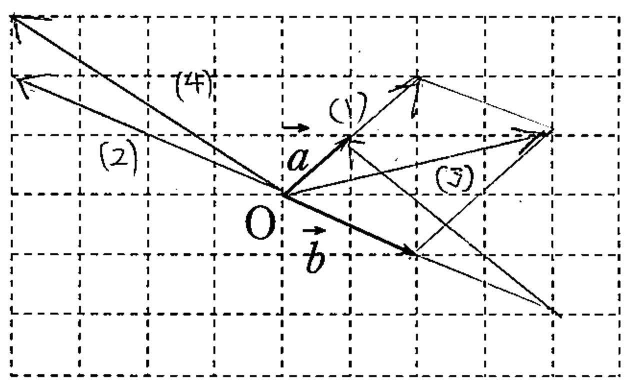
5 右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを O を始点にして図示せよ。

(1) $2\vec{a}$

(2) $-2\vec{b}$

(3) $2\vec{a}+\vec{b}$

(4) $\vec{a}-2\vec{b}$



【ベクトルの計算】

6 次の計算をせよ。

(1) $\vec{a}+3\vec{a}-2\vec{a}$

$= 2\vec{a}$

(2) $3\vec{a}+7\vec{b}-5\vec{a}-2\vec{b}$

$= -2\vec{a}+5\vec{b}$

(3) $3(2\vec{a}+\vec{b})+4(\vec{a}-2\vec{b})$

$= 6\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{a}-8\vec{b}$

$= 10\vec{a}-5\vec{b}$

(4) $2(\vec{a}-3\vec{b})-3(3\vec{a}-2\vec{b})$

$= 2\vec{a}-6\vec{b}-9\vec{a}+6\vec{b}$

$= -7\vec{a}$

(5) $\frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})+\frac{2}{3}(\vec{a}-\vec{b})$

$= \frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$

$= \vec{0}$

(6) $\frac{1}{2}(-\vec{a}+2\vec{b})-\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})$

$= -\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

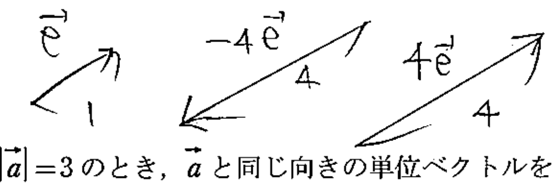
$= -\frac{3}{6}\vec{a}-\frac{4}{6}\vec{a}+\frac{3}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{b}$

$= -\frac{7}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

【ベクトルの平行と単位ベクトル】

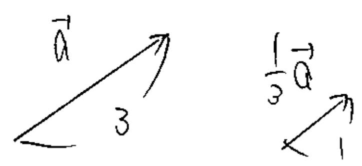
7 次の問いに答えよ。

(1) $\vec{e}$ を単位ベクトルとする。$\vec{e}$ と平行で大きさが 4 のベクトルを，$\vec{e}$ を用いて表せ。



$4\vec{e}$，$-4\vec{e}$

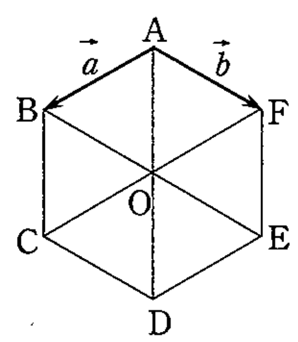
(2) $|\vec{a}|=3$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ。



$\frac{1}{3}\vec{a}$

【正六角形とベクトル】

8 正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



(1) $\overrightarrow{AC}$ $= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$= \vec{a}+\vec{a}+\vec{b}$

$= 2\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{EF}$ $= -(\vec{a}+\vec{b})$

$= -\vec{a}-\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{DB}$ $= \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$

$= -\vec{b}-(\vec{a}+\vec{b})$

$= -\vec{a}-2\vec{b}$

平面ベクトル②

【等式を満たすベクトルの決定】

9 等式 $\begin{cases}\vec{x}-\vec{y}=\vec{a}+\vec{b} & \text{—①}\\ 2\vec{x}+3\vec{y}=\vec{a}-\vec{b} & \text{—②}\end{cases}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$\vec{x}$ を消す

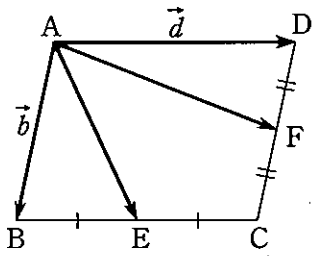
$$2\vec{x}-2\vec{y}=2\vec{a}+2\vec{b} \quad \text{—①}\times2$$
$$-)\ 2\vec{x}+3\vec{y}=\vec{a}-\vec{b} \quad \text{—②}$$
$$-5\vec{y}=\vec{a}+3\vec{b}$$
$$\vec{y}=-\frac{1}{5}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$$

$\vec{y}$ を消す

$$3\vec{x}-3\vec{y}=3\vec{a}+3\vec{b} \quad \text{—①}\times3$$
$$+)\ 2\vec{x}+3\vec{y}=\vec{a}-\vec{b} \quad \text{—②}$$
$$5\vec{x}=4\vec{a}+2\vec{b}$$
$$\vec{x}=\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$

【平行四辺形とベクトルの分解】

10 平行四辺形 ABCD の辺 BC，CD の中点をそれぞれ E，F とする。また，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。



(1) $\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$ をそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{AE}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}$$
$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}$$

(2) $\vec{b}$，$\vec{d}$ をそれぞれ $\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$ を用いて表せ。

$$\begin{cases}2\overrightarrow{AE}=2\vec{b}+\vec{d} & \text{—①}\\ 2\overrightarrow{AF}=\vec{b}+2\vec{d} & \text{—②}\end{cases}$$

$\vec{b}$ を消す

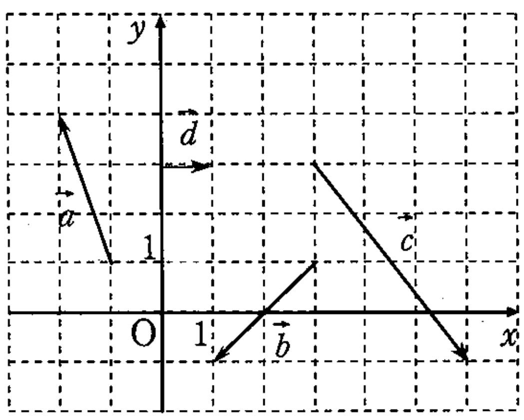
$$2\overrightarrow{AE}=2\vec{b}+\vec{d} \quad \text{—①}$$
$$-)\ 4\overrightarrow{AF}=2\vec{b}+4\vec{d} \quad \text{—②}\times2$$
$$-3\vec{d}=2\overrightarrow{AE}-4\overrightarrow{AF}$$
$$\vec{d}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AF}$$

$\vec{d}$ を消す

$$4\overrightarrow{AE}=4\vec{b}+2\vec{d} \quad \text{—①}\times2$$
$$-)\ 2\overrightarrow{AF}=\vec{b}+2\vec{d}$$
$$3\vec{b}=4\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{AF}$$
$$\vec{b}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AE}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$$

【ベクトルの成分表示】

11 右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を，それぞれ成分表示せよ。



$\vec{a}=(-1,\ 3)$

$\vec{b}=(-2,\ -2)$

$\vec{c}=(3,\ -4)$

$\vec{d}=(1,\ 0)$

【成分表示によるベクトルの計算】

12 $\vec{a}=(3,\ -1)$，$\vec{b}=(-4,\ 2)$ のとき，次のベクトルを求めよ。

(1) $4\vec{a}-3\vec{b}$

$$=4(3,-1)-3(-4,2)$$
$$=(12,-4)+(12,-6)$$
$$=(24,-10)$$

(2) $(2\vec{a}-3\vec{b})-(3\vec{a}+5\vec{b})$

$$=2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{a}-5\vec{b}$$
$$=-\vec{a}-8\vec{b}$$
$$=-(3,-1)-8(-4,2)$$
$$=(-3,1)+(32,-16)$$
$$=(29,-15)$$

【ベクトルの分解と成分】

13 $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$ とする。$\vec{c}=(8,\ -3)$ を，適当な実数 s，t を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

$$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$$
$$(8,-3)=s(2,1)+t(-1,3)$$
$$=(2s,s)+(-t,3t)$$
$$=(2s-t,\ s+3t)$$

$$\begin{cases}2s-t=8 & \text{—①}\\ s+3t=-3 & \text{—②}\end{cases}$$

$$2s-t=8$$
$$-)\ 2s+6t=-6$$
$$-7t=14$$
$$t=-2$$

①に代入

$$2s+2=8$$
$$2s=6$$
$$s=3$$

よって $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$

【ベクトルの平行】

14 2つのベクトル $\vec{a}=(4,\ x)$，$\vec{b}=(-2,\ -1)$ が平行になるように，x の値を定めよ。

$\boxed{\vec{a}=k\vec{b}}$

$\vec{a}\parallel\vec{b}$ より

$$\vec{a}=k\vec{b}$$
$$(4,x)=k(-2,-1)$$
$$=(-2k,-k)$$

$$\begin{cases}4=-2k & \text{—①}\\ x=-k & \text{—②}\end{cases}$$

① より $k=-2$

② 代入

$x=2$

【座標平面上の点とベクトル】

15 次の2点 A，B について，$\overrightarrow{AB}$ を成分表示し，$|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。

(1) A(5，2)，B(1，6)

$$\overrightarrow{AB}=(1-5,\ 6-2)$$
$$=(-4,\ 4)$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{16+16}$$
$$=\sqrt{32}$$
$$=4\sqrt{2}$$

(2) A(−3，4)，B(2，0)

$$\overrightarrow{AB}=(2+3,\ 0-4)$$
$$=(5,\ -4)$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{25+16}$$
$$=\sqrt{41}$$

平面ベクトル③

【点の座標とベクトル】

16 4点 A(1, 1), B(4, 2), C(5, 4), D(x, y) を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形であるように，x, y の値を定めよ。

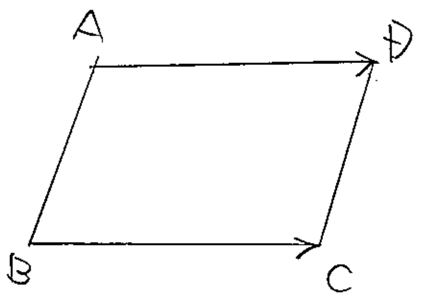
$\overrightarrow{AD}=(x-1,\ y-1)$

$\overrightarrow{BC}=(1,\ 2)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

$(x-1,\ y-1)=(1,\ 2)$

$\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=2 \end{cases}$



よって

$x=2,\ y=3$

【ベクトルの内積】

17 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合に内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $\theta=45°$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot3\cdot\cos45°$

$=12\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

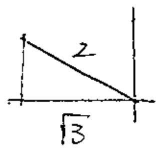
$=6\sqrt{2}$

(2) $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=6$, $\theta=150°$

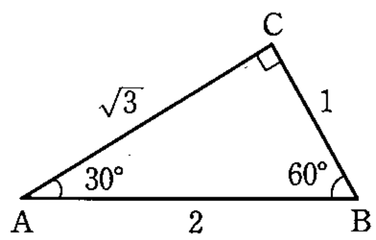
$\vec{a}\cdot\vec{b}=6\cdot6\cdot\cos150°$

$=6\cdot6\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=-18\sqrt{3}$



18 右の図の直角三角形 ABC において，次の内積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{AC}|\cos150°$

$=2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=-3$

(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

19 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(2,\ 5)$, $\vec{b}=(3,\ -2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=6-10$

$=-4$

(2) $\vec{a}=(1,\ \sqrt{3})$, $\vec{b}=(\sqrt{3},\ 3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}+3\sqrt{3}$

$=4\sqrt{3}$

【ベクトルのなす角】

20 次の2つのベクトルのなす角を求めよ。

(1) $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(-3,\ 1)$

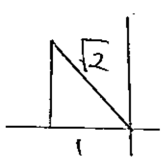
$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6+1=-5$

$|\vec{a}|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

$|\vec{b}|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$\cos\theta=\frac{-5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$



$\theta=135°$

(2) $\vec{a}=(1,\ \sqrt{3})$, $\vec{b}=(\sqrt{3},\ 1)$

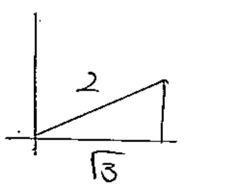
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$|\vec{a}|=\sqrt{1+3}=2$

$|\vec{b}|=\sqrt{3+1}=2$

$\cos\theta=\frac{2\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\theta=30°$

(3) $\vec{a}=(3,\ -1)$, $\vec{b}=(2,\ 6)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=6-6$

$=0$

$\cos\theta=0$

$\theta=90°$

(4) $\vec{a}=(-4,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ -1)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-8-2=-10$

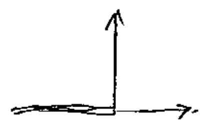
$|\vec{a}|=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$

$|\vec{b}|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$=\frac{-10}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}$

$=-1$



$\theta=180°$

【ベクトルの成分と垂直条件】

21 次の2つのベクトルが垂直になるような x の値を求めよ。

(1) $\vec{a}=(3,\ 6)$, $\vec{b}=(x,\ 4)$

$\vec{a}\perp\vec{b}$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$3x+24=0$

$3x=-24$

$x=-8$

(2) $\vec{a}=(x,\ -1)$, $\vec{b}=(x,\ x+2)$

$\vec{a}\perp\vec{b}$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$x^2-(x+2)=0$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=-1,\ 2$

22 次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}=(2,\ 1)$ に垂直で大きさが $\sqrt{10}$ のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

$\vec{b}=(x,\ y)$ とおく

$\vec{a}\perp\vec{b}$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$2x+y=0$ — ①　　$y=-2x$ — ①'

$|\vec{b}|=\sqrt{10}$ より

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{10}$

$x^2+y^2=10$ — ②

①'を②に代入

$x^2+(-2x)^2=10$

$5x^2=10$

$x^2=2$

$x=\pm\sqrt{2}$

①'に代入

$\vec{b}=(\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$

(2) $\vec{a}=(4,\ 3)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

大きさ1

$\vec{e}=(x,y)$ とおく

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より

$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$

$4x+3y=0$ —①

$3y=-4x$

$y=-\frac{4}{3}x$ —①'

$|\vec{e}|=1$ より

$\sqrt{x^2+y^2}=1$

$x^2+y^2=1$ —②

①'を②に代入

$x^2+\left(-\frac{4}{3}x\right)^2=1$

$x^2+\frac{16}{9}x^2=1$

$\frac{25}{9}x^2=1$

$x^2=\frac{9}{25}$

$x=\pm\frac{3}{5}$

①'に代入

$\vec{e}=\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right),\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ //

【内積とベクトルの大きさ】

$\boxed{23}$ $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=9-6+4$

$=7$

$|\vec{a}+\vec{b}|>0$ より $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$ //

(2) $|\vec{a}-2\vec{b}|$

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=9+12+16$

$=37$

$|\vec{a}-2\vec{b}|>0$ より $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{37}$ //

$\boxed{24}$ $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=2$ で，ベクトル $3\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{a}+4\vec{b}$ が垂直であるとする。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

$\boxed{(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+4\vec{b})=0}$

$(3\vec{a}-2\vec{b})\perp(\vec{a}+4\vec{b})$ より

$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+4\vec{b})=0$

$3|\vec{a}|^2+10\vec{a}\cdot\vec{b}-8|\vec{b}|^2=0$

$12+10\vec{a}\cdot\vec{b}-32=0$

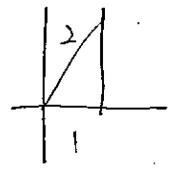
$10\vec{a}\cdot\vec{b}=20$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ //

(2) $\vec{a},\ \vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$=\frac{2}{2\cdot2}$



$=\frac{1}{2}$

$\theta=60^\circ$ //

$\boxed{25}$ $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2,\ |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=7$

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7$

$9-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=7$

$-2\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ //

(2) $\vec{a},\ \vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$=\frac{3}{3\cdot2}$

$=\frac{1}{2}$

$\theta=60^\circ$ //

(3) $|2\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=36-12+4$

$=28$

$|2\vec{a}-\vec{b}|>0$ より

$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ //

【内積と三角形の面積】

26 3 点 O(0, 0), A(3, 1), B(2, 4) について，次のものを求めよ

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

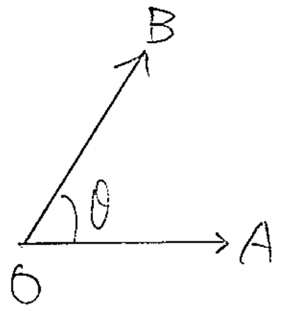
$\overrightarrow{OA} = (3, 1)$

$\overrightarrow{OB} = (2, 4)$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 6 + 4 = \underline{10}$

(2) ∠AOB の大きさ

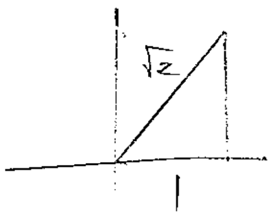
$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$



$\left(\begin{array}{l} |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \\ |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \end{array}\right)$

$= \dfrac{10}{\sqrt{10}\sqrt{20}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

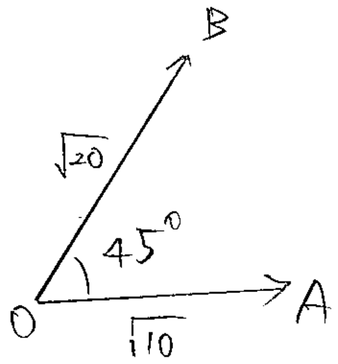


よって. $\theta = 45°$

(3) △OAB の面積 S を求めよ。

$S = \dfrac{1}{2}\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}\,\sin 45°$

$= \underline{5}$



$S = \dfrac{1}{2}\,ⓑ\triangle\sin\theta$

【ベクトルの大きさと最小値】

27 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2t\,\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2|\vec{b}|^2$

$= 9 + 8t + 4t^2$

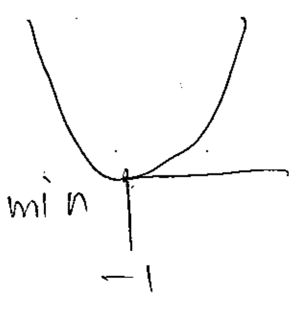
$= 4t^2 + 8t + 9$

$= 4(t^2+2t) + 9$

$= 4\{(t+1)^2 - 1\} + 9$

$= 4(t+1)^2 - 4 + 9$

$= 4(t+1)^2 + 5$



$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ の min 5 $(t=-1)$

5 $|\vec{a}+t\vec{b}|$ の $\underline{\min\sqrt{5}\ (t=-1)}$

【分点の位置ベクトル】

28 2 点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) を結ぶ線分 AB に対して，次のような点の位置ベクトルを求めよ。

(1) 2 : 3 に内分する点

$\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3} = \underline{\dfrac{3}{5}\vec{a} + \dfrac{2}{5}\vec{b}}$

(2) 3 : 1 に内分する点

$\dfrac{\vec{a}+3\vec{b}}{3+1} = \underline{\dfrac{1}{4}\vec{a} + \dfrac{3}{4}\vec{b}}$

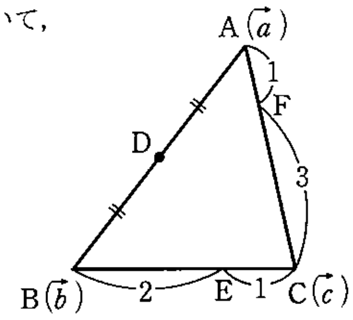
(3) 4 : 1 に外分する点

$\dfrac{-\vec{a}+4\vec{b}}{4-1} = \underline{-\dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{4}{3}\vec{b}}$

(4) 中点

$\underline{\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}}$

29 3 点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC において，辺 AB の中点を D，辺 BC，CA をそれぞれ 2 : 1，3 : 1 に内分する点を E，F とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



(1) $\overrightarrow{AC}$ $= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$= \underline{\vec{c} - \vec{a}}$

(2) $\overrightarrow{BE}$ $= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB}$

$= \dfrac{\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}}{2+1} - \overrightarrow{OB}$

$= \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{2}{3}\vec{c} - \vec{b}$

$= \underline{-\dfrac{2}{3}\vec{b} + \dfrac{2}{3}\vec{c}}$

(3) $\overrightarrow{DF}$ $= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD}$

$= \dfrac{3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{1+3} - \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

$= \dfrac{3}{4}\vec{a} + \dfrac{1}{4}\vec{c} - \dfrac{1}{2}\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$

$= \underline{\dfrac{1}{4}\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b} + \dfrac{1}{4}\vec{c}}$

30 △ABC と点 P に対して，$2\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ が成り立っている。

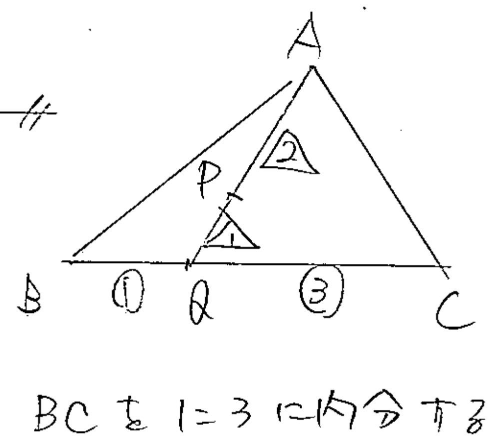
(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

$2\overrightarrow{AP} + 3(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$2\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{AP} - 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$6\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AP} = \underline{\dfrac{3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{6}}$



(2) 点 P はどのような位置にあるか。

$\overrightarrow{AP} = \dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}$

$= \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{1+3}$

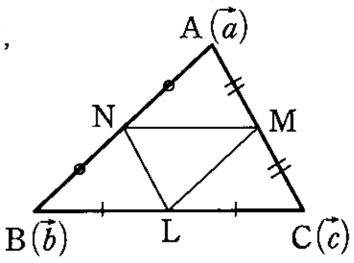
BC を 1：3 に内分する点を Q とすると

<u>AQ を 2：1 に内分する点</u>

平面ベクトル⑥

【重心の位置ベクトル】

31 3点A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)を頂点とする△ABCにおいて，辺BC，CA，ABの中点を，それぞれL，M，Nとする。また，△LMNの重心をG'とする。



(1) 点G'の位置ベクトル$\vec{g'}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}}{3}$$

$$\left(\overrightarrow{OL} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\quad \overrightarrow{OM} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2},\quad \overrightarrow{ON} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)$$

$$= \frac{\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}+\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}}{3}$$

$$= \frac{\frac{2\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}}{2}}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

(2) 等式$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$が成り立つことを示せ。

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OA} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\vec{a} = \frac{\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a}}{2}$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}-\vec{b} = \frac{\vec{c}+\vec{a}-2\vec{b}}{2}$$

$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OC} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\vec{c} = \frac{\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}}{2}$$

$$(左辺) = \frac{\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{a}-2\vec{b}}{2}+\frac{\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}}{2}$$

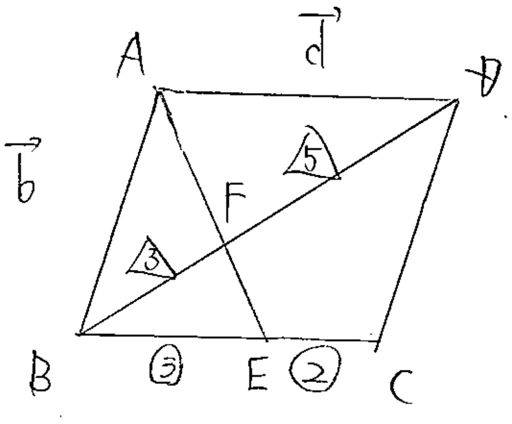
$$= \vec{0} = (右辺)$$

よって　(左辺) = (右辺)

【一直線上にある3点】

32 平行四辺形ABCDにおいて，辺BCを3:2に内分する点をE，対角線BDを3:5に内分する点をFとする。このとき，3点A，F，Eは一直線上にあることを証明せよ。

$\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AE}$ を示す



$$\overrightarrow{AF} = \frac{5\vec{b}+3\vec{d}}{3+5} = \frac{5\vec{b}+3\vec{d}}{8}$$

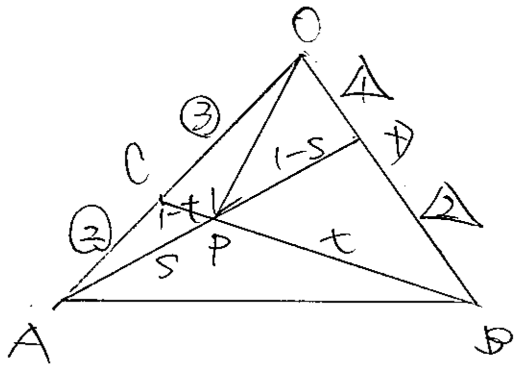
$$\overrightarrow{AE} = \frac{2\vec{b}+3\overrightarrow{AC}}{3+2} = \frac{2\vec{b}+3(\vec{b}+\vec{d})}{5} = \frac{5\vec{b}+3\vec{d}}{5}$$

よって　$\overrightarrow{AF} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AE}$

従って　3点，A，F，Eは一直線上

【交点の位置ベクトル[1]】

33 △OABにおいて，辺OAを3:2に内分する点をC，辺OBを1:2に内分する点をDとし，線分ADと線分BCの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とするとき，$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。



△OAD において

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OD}$$
$$= (1-s)\vec{a} + \frac{1}{3}s\vec{b}$$

△OCBにおいて

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OC} + (1-t)\overrightarrow{OB}$$
$$= \frac{3}{5}t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad —③$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$は一次独立なので

$$\begin{cases} 1-s = \frac{3}{5}t \\ \frac{1}{3}s = 1-t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5-5s = 3t & —① \\ s = 3-3t & —② \end{cases}$$

②を①に代入

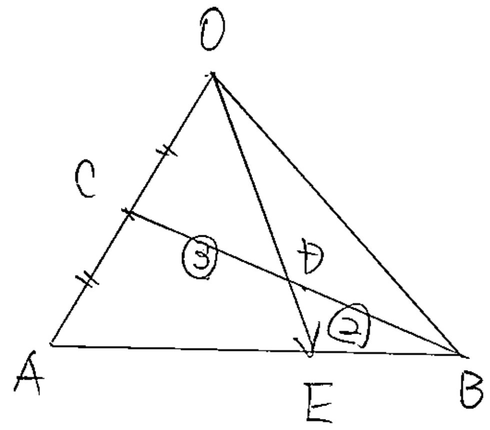
$$5-5(3-3t) = 3t$$
$$5-15+15t = 3t$$
$$12t = 10$$
$$t = \frac{5}{6}$$

③に代入

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$

【交点の位置ベクトル[2]】

34 △OABにおいて，辺OAの中点をC，線分BCを2:3に内分する点をDとし，直線ODと辺ABの交点をEとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とするとき，$\overrightarrow{OE}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。



3点O，D，Eは一直線上

$$\overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OD}$$
$$= k\left(\frac{2\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OB}}{3+2}\right)$$
$$= k\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}\right)$$
$$= k\left(\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}\right)$$
$$= \frac{1}{5}k\vec{a}+\frac{3}{5}k\vec{b} \quad —①$$

点Eは線分AB上にあるので

$$\frac{1}{5}k+\frac{3}{5}k = 1$$
$$\frac{4}{5}k = 1$$
$$k = \frac{5}{4}$$

①に代入

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

【直線と円の方程式】

35 $\vec{a}=(3,\ 2)$, $\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{p}=(x,\ y)$ として，次のベクトル方程式で表される図形を，x と y の方程式で表せ。

(1) $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$

$(x, y) = (3, 2) + t(-1, 2)$

$= (3, 2) + (-t, 2t)$

$= (3-t, 2+2t)$

$\begin{cases} x = 3-t & \text{—①} \\ y = 2+2t & \text{—②} \end{cases}$

$t = 3-x$ —①′

①′を②に代入　$y = 2+2(3-x)$

$\underline{2x+y-8=0}$ //

(2) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$

$\vec{p}-\vec{a} = (x, y)-(3, 2)$

$= (x-3, y-2)$

$\vec{b} = (-1, 2)$

$\vec{a}=(○, △)$　$\vec{b}=(○, △)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = ○○ + △△$

x成分どうし　y成分どうし

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{b} = 0$ より

$-x+3+2y-4=0$

$2y = x+1$

$\underline{x-2y+1=0}$ //

(3) $|\vec{p}-\vec{a}|=2$

$\vec{p}-\vec{a} = (x-3, y-2)$　((2) より)

$|\vec{p}-\vec{a}| = 2$ より

$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = 2$

$\vec{a} = (○, △)$

$|\vec{a}| = \sqrt{○^2+△^2}$

$\underline{(x-3)^2+(y-2)^2 = 4}$ //

(4) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

$\vec{p}-\vec{a} = (x-3, y-2)$　((2) より)

$\vec{p}-\vec{b} = (x, y)-(-1, 2)$

$= (x+1, y-2)$

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b}) = 0$ より

$(x-3)(x+1) + (y-2)(y-2) = 0$

$x^2-2x-3 + (y-2)^2 = 0$

$(x-1)^2-1-3 + (y-2)^2 = 0$

$\underline{(x-1)^2+(y-2)^2 = 4}$ //

【直線のベクトル方程式】

36 次の条件を満たす直線の方程式を，ベクトルを用いて求めよ。

(1) A$(-2,\ 3)$ を通り，ベクトル $\vec{d}=(2,\ 1)$ に平行

P(x, y) とする

$\boxed{\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{d}}$

$(x, y) = (-2, 3) + t(2, 1)$

$= (-2+2t, 3+t)$

$\begin{cases} x = -2+2t & \text{—①} \\ y = 3+t & \text{—②} \end{cases}$

$t = y-3$ —②′

②′を①に代入

$x = -2+2(y-3)$

$x = -2+2y-6$

$\underline{x-2y+8=0}$ //

(2) 2点 A$(-1,\ 2)$, B$(3,\ 1)$ を通る

P(x, y) とする

$\vec{AB} = (4, -1)$

$\boxed{\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{AB}}$

$(x, y) = (-1, 2) + t(4, -1)$

$= (4t-1, -t+2)$

$\begin{cases} x = 4t-1 & \text{—①} \\ y = -t+2 & \text{—②} \end{cases}$

$t = 2-y$ —②′

②′を①に代入

$x = 4(2-y)-1$

$x = 8-4y-1$

$\underline{x+4y-7=0}$ //

37 次の条件を満たす直線の方程式を，ベクトルを用いて求めよ。

(1) A$(3,\ 1)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(2,\ 3)$ に垂直

P(x, y) とする

$\vec{AP} = (x-3, y-1)$

$\boxed{\vec{AP}\cdot\vec{n} = 0}$

$2(x-3)+3(y-1) = 0$

$2x-6+3y-3 = 0$

$2x+3y-9 = 0$

(2) 3点 A$(3,\ 1)$, B$(-2,\ 2)$, C$(1,\ -5)$ について，点Cを通り，直線ABに垂直

P(x, y) とする

$\vec{AB} = (-5, 1)$

$\vec{CP} = (x-1, y+5)$

$\boxed{\vec{AB}\cdot\vec{CP} = 0}$

$-5(x-1) + y+5 = 0$

$-5x+5+y+5 = 0$

$\underline{5x-y-10=0}$ //

【円のベクトル方程式】

38 定点A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)と動点P($\vec{p}$)について，次のベクトル方程式で表される点Pはどのような図形上を動くか。

(1) $|\vec{p}-\vec{a}|=3$

中心 点A
半径 3 の円

(2) $|6\vec{p}-3\vec{a}|=2$

$6\left|\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|=2$

$\left|\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|=\frac{1}{3}$

中心 線分OAの中点，
半径 $\frac{1}{3}$ の円

(3) $|2\vec{p}-\vec{a}-\vec{b}|=8$

$2\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}}{2}-\frac{\vec{b}}{2}\right|=8$

$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=4$

中心 線分ABの中点，
半径 4 の円

(4) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

直径ABの円

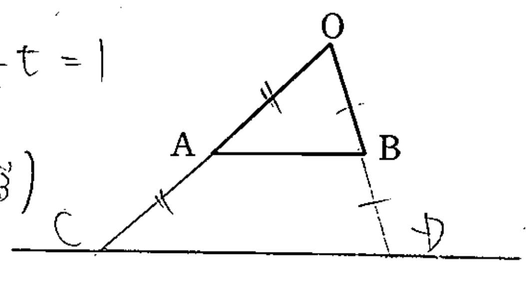
【終点の存在範囲】

39 △OABにおいて，次の式を満たす点Pの存在範囲を求めよ。

(1) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，　$s+t=2$

$\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t=1$

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}s(2\overrightarrow{OA})+\frac{1}{2}t(2\overrightarrow{OB})$

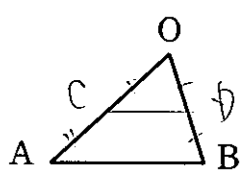


直線CD

(2) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，　$s+t=\frac{1}{2}$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

$2s+2t=1$

$\overrightarrow{OP}=2s\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

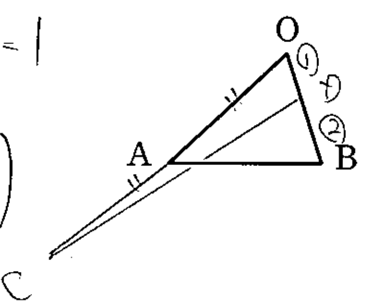


線分CD

(3) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，　$s+6t=2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

$\frac{1}{2}s+3t=1$

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}s(2\overrightarrow{OA})+3t\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)$



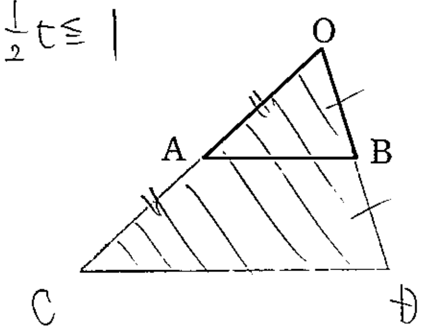
線分CD

40 △OABにおいて，次の式を満たす点Pの存在範囲を求めよ。

(1) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，　$0\leqq s+t\leqq 2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

$0\leqq\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t\leqq 1$

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}s(2\overrightarrow{OA})+\frac{1}{2}t(2\overrightarrow{OB})$

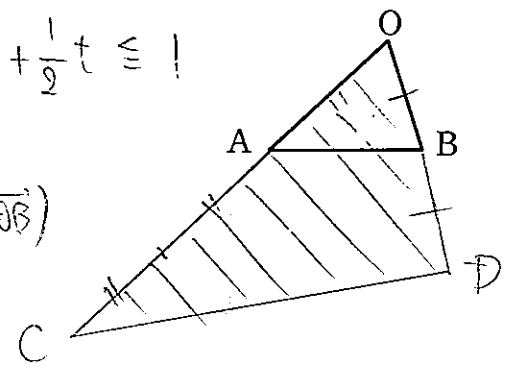


△OCDの周および内部

(2) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，　$0\leqq 2s+3t\leqq 6$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

$0\leqq\frac{1}{3}s+\frac{1}{2}t\leqq 1$

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}s(3\overrightarrow{OA})+\frac{1}{2}t(2\overrightarrow{OB})$



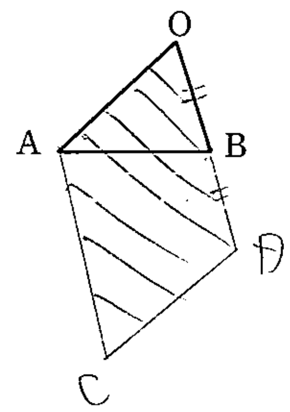
△OCDの周および内部

41 △OABにおいて，次の式を満たす点Pの存在範囲を求めよ。

(1) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，　$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 2$

$0\leqq\frac{1}{2}t\leqq 1$

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}t(2\overrightarrow{OB})$

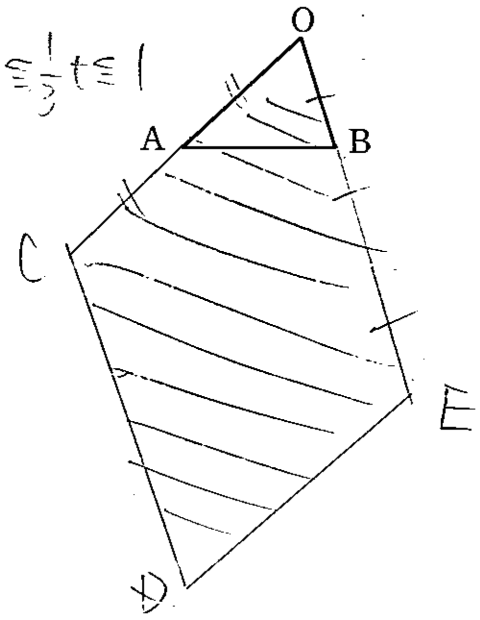


平行四辺形OACDの周および内部

(2) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$0\leqq s\leqq 2$，$0\leqq t\leqq 3$

$0\leqq\frac{1}{2}s\leqq 1$，$0\leqq\frac{1}{3}t\leqq 1$

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}s(2\overrightarrow{OA})+\frac{1}{3}t(3\overrightarrow{OB})$



平行四辺形OCDEの周および内部