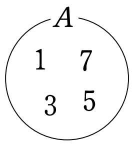
# 集合と命題①（公式）

## 集合の表記

① $A=\underbrace{\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}}_{\text{要素の列挙}}$




② $A=\{\underbrace{x}_{\text{要素の代表}} \mid \underbrace{1\leqq x\leqq 7,\ x \text{ は奇数}}_{x\text{ の満たす条件}}\}$

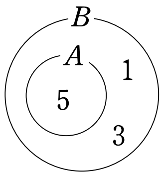
③ $A=\{\underbrace{2n-1}_{\text{要素の代表}} \mid \underbrace{1\leqq n\leqq 4,\ n \text{ は整数}}_{x\text{ の満たす条件}}\}$

## 集合と要素

$A\subset B$ 集合と集合

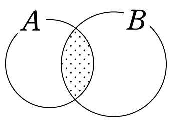
$5\in A$

$3\notin A$ 集合と要素

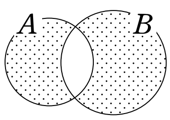



## 共通部分と和集合

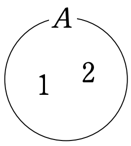
$A\cap B$




$A\cup B$




## 空集合

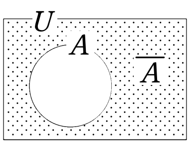



$A$ の部分補集合は

$\underset{\sim}{\varnothing}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,\ 2\}$

どんな集合においても，空集合はその部分集合

## 補集合




$U$ … 全体集合

$\overline{A}$ … 補集合

## ド・モルガンの法則

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

## 命題の仮定と結論

命題「 $\underbrace{p}_{\text{仮定}} \Longrightarrow \underbrace{q}_{\text{結論}}$ 」　（$p$ ならば $q$）

命題が正しいとき　真
命題が正しくないとき　偽

例

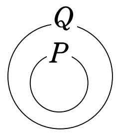
$x=2 \Longrightarrow x^2=4$

仮定「 $x=2$ 」　結論「 $x^2=4$ 」

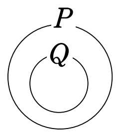
## 条件と集合（$p\Longrightarrow q$ が真）

条件 $p$ を満たすものの全体の集合を $P$
条件 $q$ を満たすものの全体の集合を $Q$　とすると

「$p \Longrightarrow q$ が真」　$\Longleftrightarrow$　$P\subset Q$




「$q \Longrightarrow p$ が真」　$\Longleftrightarrow$　$Q\subset P$

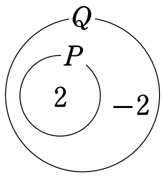



例

「$x=2 \Longrightarrow x^2=4$ 」の真偽を調べよ。

$x=2$ のとき $x^2=4$ なのでこの命題は真

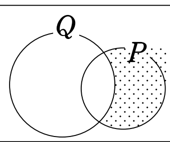
集合で考えても…




$P\subset Q$ なので真

## 条件と集合（$p\Longrightarrow q$ が偽）

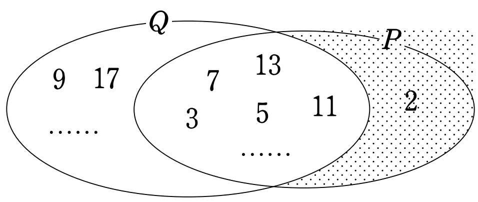
「$p \Longrightarrow q$ が偽」　$\Longleftrightarrow$　$P\not\subset Q$




はみ出している部分は反例

例

「$n$ は素数 $\Longrightarrow$ $n$ は奇数」の真偽を調べよ。

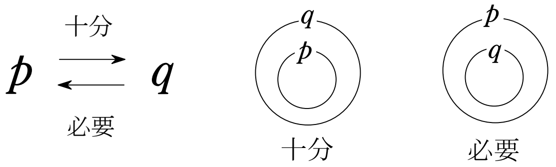



$P\not\subset Q$ なので偽　　反例は「$n=2$ 」

### 必要条件・十分条件の判定

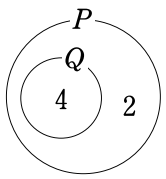
2つの条件 $p$，$q$ であるとき，

① $p \Longrightarrow q$ の真偽を調べる
② $q \Longrightarrow p$ の真偽を調べる
③ $p \Longrightarrow q$ が真ならば，$p$ は $q$ の十分条件
　 $q \Longrightarrow p$ が真ならば，$p$ は $q$ の必要条件




例

$p : x^2-6x+8=0$ 　　　　　 $q : x=4$
　$(x-2)(x-4)=0$
　　$x=2,\ 4$




$P \subset Q$ なので，十分条件

### 必要十分条件

「$p \Leftrightarrow q$」 のとき
- $p$ は $q$ の($q$ は $p$ の)必要十分条件
- $p$ と $q$ は同値
- $P=Q$

### 否定

| $p$ | $\overline{p}$ |
|---|---|
| かつ | または |
| $\leqq$ | $<$ |
| 奇数 | 偶数 |
| 無理数 | 有理数 |
| ともに | 少なくとも一方は |
| 3の倍数 | 3の倍数でない |
| 正の数 | 0以下の数 |

$p$ が真のとき $\overline{p}$ は偽
$p$ が偽のとき $\overline{p}$ は真

例

「$n$ は5より小さい」の否定は「$n$ は5以上」

「$x \leqq 0$ または $y>0$」の否定は「$x>0$ かつ $y \leqq 0$」

「$x$，$y$ の少なくとも一方は有理数」の否定は
「$x$，$y$ はともに無理数」

### 「すべて」「ある」の否定

| $p$ | $\overline{p}$ |
|---|---|
| すべての $x$ | ある $x$ |
| 任意の $x$ | 少なくとも1つの $x$ |

$p$ が真のとき $\overline{p}$ は偽
$p$ が偽のとき $\overline{p}$ は真

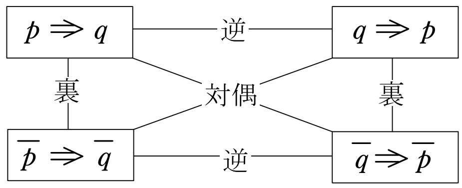
例

「すべての実数 $x$ は $x^2>0$」の否定は
「ある実数 $x$ は $x \leqq 0$」

「任意の実数 $x$，$y$ に対して $x^2-4xy+4y^2>0$」の否定は
「ある実数 $x$，$y$ に対して $x^2-4xy+4y^2 \leqq 0$」

「少なくとも1つの自然数 $n$ について $n^2-5n-6=0$」
の否定は「すべての自然数 $n$ について $n^2-5n-6 \neq 0$」

### 逆・裏・対偶




もとの命題が真でも，その逆が真とは限らない
命題の真偽とその対偶の真偽は一致する

例

命題「$x=1 \Longrightarrow x^2=1$」
　逆「$x^2=1 \Longrightarrow x=1$」
　裏「$x \neq 1 \Longrightarrow x^2 \neq 1$」
対偶「$x^2 \neq 1 \Longrightarrow x \neq 1$」

### 背理法

① 命題Aが成り立たないと仮定
② 矛盾を導く
③ よって，もとの命題Aは正しい

例

$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，次の命題を証明せよ。
　$1+\sqrt{2}$ は無理数である。

証明

$1+\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると，$1+\sqrt{2}$ は有理数

$1+\sqrt{2}=r$ （$r$：有理数） とおく
$\sqrt{2}=r-1$

$\sqrt{2}$ は無理数，$r-1$ は有理数なので矛盾
よって，$1+\sqrt{2}$ は無理数