

整数の性質①

【約数・倍数】

1 次の問いに答えよ。

(1) 12の約数をすべて求めよ。

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

(2) 6の正の倍数を小さいものから5個求めよ。

6, 12, 18, 24, 30

【正の約数】

2 次の数の正の約数をすべて求めよ。また、正の約数の個数を求めよ。

(1) 60

$2 \overline{)60}$
 $2 \overline{)30}$
 $3 \overline{)15}$
 5
 $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
 $3 \times 2 \times 2 = 12$

1	2	3	4	5	6
60	30	20	15	12	10

(2) 117

$3 \overline{)117}$
 $3 \overline{)39}$
 13
 $117 = 3^2 \cdot 13$
 $3 - 2 = 6$

1	13
1	13
3	39
3^2	117

(1, 3, 9, 13, 39, 117)

【倍数であることの証明】

3 a, bは整数とする。次のことを証明せよ。

(1) a, bが5の倍数ならば、a+bは5の倍数である。

$a = 5k$
 $b = 5l$ (k, l: 整数)
 $a + b = 5k + 5l$
 $= 5(k + l)$ (k+l: 整数)

(2) a, a+bが5の倍数ならば、bは5の倍数である。

$a = 5k$
 $a + b = 5l$ (k, l: 整数)
 $5k + b = 5l$
 $b = 5l - 5k$
 $= 5(l - k)$ (l-k: 整数)

【倍数の判定法】

4 次の数は、2, 3, 4, 5, 6, 8, 9のうち、どの数の倍数になるか答えよ。

(1) 1240

2, 4, 5, 8

(2) 4158

2, 3, 6, 9

5 一の位の数わからない4桁の自然数123□が、5の倍数であり、3の倍数でもあるとき、一の位の数求めよ。

5の倍数 \rightarrow 1230, 1235
 ① 1230 $a \equiv 0$ $1+2+3+0 = 6$
 ② 1235 $a \equiv 5$ $1+2+3+5 = 11$
 よって 1230

【素因数分解と平方根】

6 次の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{168n}$ が自然数になるような最小の自然数nを求めよ。

$2 \overline{)168}$
 $2 \overline{)84}$
 $2 \overline{)42}$
 $3 \overline{)21}$
 7
 $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$
 $\sqrt{2^3 \cdot 3 \cdot 7 \times n}$
 $\sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2}$ には $n = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

(2) $\sqrt{\frac{280}{n}}$ が自然数となるような最小の自然数nを求めよ。

$2 \overline{)280}$
 $2 \overline{)140}$
 $2 \overline{)70}$
 $5 \overline{)35}$
 7
 $280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$
 $\sqrt{\frac{2^3 \cdot 5 \cdot 7}{n}}$
 $\sqrt{2^2}$ には $n = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$

【等式を満たす整数x, yの組】

7 次の関係を満たす整数x, yの組をすべて求めよ。

(1) $xy + 2x = 3$

(2) $xy - 3x + y = 1$

$x(y+2) = 3$

x	1	3	-1	-3
y+2	3	1	-3	-1

x	1	3	-1	-3
y	1	-1	-5	-3

$x(y-3) + (y-3) + 3 = 1$
 $(x+1)(y-3) = -2$

x+1	1	-1	-2	2
y-3	-2	2	1	-1

x	0	-2	-3	1
y	1	5	4	2

$(x, y) = (1, 1), (3, -1), (-1, -5), (-3, -3)$

$(x, y) = (0, 1), (-2, 5), (-3, 4), (1, 2)$

【最大公約数と最小公倍数】

8 次の整数の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1) 60, 72

(2) 378, 840

$2 \overline{)60}$
 $2 \overline{)30}$
 $3 \overline{)15}$
 5
 $2 \overline{)72}$
 $2 \overline{)36}$
 $2 \overline{)18}$
 $3 \overline{)9}$
 3

$2 \overline{)378}$
 $3 \overline{)189}$
 $3 \overline{)63}$
 $3 \overline{)21}$
 7
 $2 \overline{)840}$
 $2 \overline{)420}$
 $2 \overline{)210}$
 $3 \overline{)105}$
 $5 \overline{)35}$
 7

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
 $72 = 2^3 \cdot 3^2$

$378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$
 $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

最大公約数 $2^2 \cdot 3 = 12$

最大公約数 $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

最小公倍数 $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

最小公倍数 $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 7560$

(3) 28, 84, 180

$2 \overline{)28}$
 $2 \overline{)14}$
 7
 $2 \overline{)84}$
 $2 \overline{)42}$
 $3 \overline{)21}$
 7

$2 \overline{)180}$
 $2 \overline{)90}$
 $3 \overline{)45}$
 $3 \overline{)15}$
 5

$28 = 2^2 \cdot X \cdot X \cdot 7$
 $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot X \cdot 7$
 $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot X$

最大公約数 $2^2 = 4$

最小公倍数 $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$

整数の性質②

9 nは正の整数とする。nと18の最小公倍数が180であるようなnをすべて求めよ。

$$18 = 2 \cdot 3^2 \cdot X$$

$$n = 2^2 \cdot \begin{matrix} \times \\ 3 \\ 2^2 \end{matrix} \cdot 5$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)18} \\ \underline{3 \ 2 \ 9} \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)180} \\ \underline{2 \ 1 \ 90} \\ 3 \ 1 \ 45 \\ \underline{3 \ 1 \ 5} \\ 5 \end{array}$$

最小公倍数 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

∴ 2

$$n = 2^2 \cdot 5 = 20$$

$$n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

$$n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

$n = 20, 60, 180$ //

10 aは自然数とする。a+1は5の倍数であり、a+2は9の倍数であるとき、a+11は45の倍数であることを証明せよ。

$$a + 1 = 5k$$

$$a + 2 = 9l$$

$$a + 11 = a + 1 + 10 = 5k + 10 = 5(k + 2) \quad (k + 2 : \text{整数})$$

$$a + 11 = a + 2 + 9 = 9l + 9 = 9(l + 1) \quad (l + 1 : \text{整数})$$

5と9は互いに素なので a+11は45の倍数

【除法の性質】

11 a, bは整数とする。aを5で割ると3余り、bを5で割ると4余る。次の数を5で割ったときの余りを求めよ。

$$a = 5k + 3$$

$$b = 5l + 4 \quad (k, l : \text{整数})$$

(1) $2a + 3b$

$$= 2(5k + 3) + 3(5l + 4)$$

$$= 10k + 6 + 15l + 12$$

$$= 10k + 15l + 18$$

$$= 10k + 15l + 15 + 3$$

$$= 5(2k + 3l + 3) + 3$$

∴ 2. 3 //

(2) ab

$$= (5k + 3)(5l + 4)$$

$$= 25kl + 20k + 15l + 12$$

$$= 25kl + 20k + 15l + 10 + 2$$

$$= 5(5kl + 4k + 3l + 2) + 2$$

∴ 2. 2 //

【最大公約数と最小公倍数からの2数の決定】

12 最大公約数が15、最小公倍数が180である2つの自然数a, bの組をすべて求めよ。ただし、a < bとする。

$$\begin{cases} a = 15m & \text{--- ①} \\ b = 15n & \text{--- ②} \\ 180 = 15mn & \text{--- ③} \end{cases}$$

a, bの最大公約数が①
最小公倍数が②

$$a = \textcircled{\cdot} m$$

$$b = \textcircled{\cdot} n \quad (\text{注}) m, n \text{ は互いに素}$$

$$\Delta = \textcircled{\cdot} mn \quad \text{は互いに素}$$

③より $mn = 12$

∴ 2

m	1	2	3	$m < n$
n	12	6	4	

m, nは互いに素

①②に代入

$$(a, b) = (15, 180)$$

$$(45, 60) //$$

【倍数であることの証明】

13 次のことを証明せよ。
連続する2つの偶数の2乗の和から4を引いた数は、16の倍数である。

$2k, 2k+2$ とする (k: 整数)

$$(2k)^2 + (2k+2)^2 - 4$$

$$= 4k^2 + 4k^2 + 8k + 4 - 4$$

$$= 8k^2 + 8k$$

$$= 8(k^2 + k)$$

$$= 8k(k+1)$$

k(k+1)は2の倍数なので

8k(k+1)は16の倍数

【剰余類】

14 nは整数とする。次のことを証明せよ。
 n^2 を3で割ったときの余りは、2ではない。

[1] $n = 3k$ のとき

$$n^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$$

[2] $n = 3k + 1$ のとき

$$n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

[3] $n = 3k + 2$ のとき

$$n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

∴ 3で割ったときの余りは2ではない

整数の性質③

【ユークリッドの互除法】

15 次の2つの整数の最大公約数を、互除法を用いて求めよ。

(1) 629, 259

(2) 841, 377

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 2 \\ 37 \overline{) 111} \overline{) 259} \overline{) 629} \\ \underline{111} \quad \underline{222} \quad \underline{518} \\ 0 \quad 37 \quad 111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 4 \quad 2 \\ 29 \overline{) 87} \overline{) 377} \overline{) 841} \\ \underline{87} \quad \underline{348} \quad \underline{754} \\ 0 \quad 29 \quad 87 \end{array}$$

37

29

【1次不定方程式】

16 次の等式を満たす整数 x, y の組を1つ求めよ。

(1) 13x + 8y = 7

(2) 7x - 5y = 1

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 13 & 13 & 26 & 39 & 52 \\ 8 & 8 & 16 & 24 & 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 7 & 7 & 14 & 21 & 28 \\ 5 & 5 & 10 & 15 & 20 \end{array}$$

x = 3, y = -4

x = 3, y = 4

(3) 4x - 7y = 5

(4) 130x + 31y = 1

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 4 & 8 & 12 & 16 \\ 7 & 7 & 14 & 21 & 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & & -5 & & 21 \\ \hline & & 1 & & 1 \\ 1 & & -5 & & -4 \\ 6 \overline{) 31} \overline{) 130} & & & & \\ \underline{30} & & & & 124 \\ \hline & & & & 6 \end{array}$$

4(2) - 7(1) = 1
4(10) - 7(5) = 5

x = 10, y = 5

x = -5, y = 21

(5) 35x + 109y = 1

(6) 33x + 14y = 3

$$\begin{array}{c|cccc} & 9 & & -28 & \\ \hline & -1 & 9 & & \\ 1 & -1 & -8 & -3 & \\ 3 \overline{) 4} \overline{) 35} \overline{) 109} & & & & \\ \underline{3} & & 32 & 105 & \\ \hline & & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & & -7 & \\ \hline & -1 & 3 & & \\ 1 & -1 & -2 & -2 & \\ 4 \overline{) 5} \overline{) 14} \overline{) 33} & & & & \\ \underline{4} & & 10 & 28 & \\ \hline & & 1 & 4 & 5 \end{array}$$

x = -28, y = 9

33(3) + 14(-7) = 1
33(9) + 14(-21) = 3
x = 9, y = -21

(7) 61x - 27y = 8

(8) 19x - 24y = 3

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & & -9 & \\ \hline & -1 & 4 & & \\ 1 & -1 & -3 & -2 & \\ 6 \overline{) 7} \overline{) 27} \overline{) 61} & & & & \\ \underline{6} & & 21 & 54 & \\ \hline & & 1 & 6 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & & -5 & \\ \hline & -1 & 4 & & \\ 1 & -1 & -3 & -1 & \\ 4 \overline{) 5} \overline{) 19} \overline{) 24} & & & & \\ \underline{4} & & 15 & 19 & \\ \hline & & 1 & 4 & 5 \end{array}$$

61(4) + 27(-9) = 1
61(4) - 27(9) = 1
61(32) - 27(72) = 8
x = 32, y = 72

19(-5) + 24(4) = 1
19(-5) - 24(-4) = 1
19(-15) - 24(-12) = 3
x = -15, y = -12

17 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) 5x - 7y = 1

5(3) - 7(2) = 1

① - ②

5(x-3) - 7(y-2) = 0

5と7は互いに素なので

x-3 = 7k (k:整数)

y-2 = 5k

k > 2

x = 7k + 3

y = 5k + 2

(2) 34x + 29y = 3

34(6) + 29(-7) = 1

34(18) + 29(-21) = 3

① - ②

34(x-18) + 29(y+21) = 0

34と29は互いに素なので

x-18 = 29k (k:整数)

y+21 = -34k

k > 2

x = 29k + 18

y = -34k - 21

【1次不定方程式の応用】

18 17で割ると7余り、12で割ると10余るような自然数のうち、4桁で最小のものを求めよ。

N = 17x + 7

N = 12y + 10

17x + 7 = 12y + 10

17x - 12y = 3

17(5) + 12(-7) = 1

17(15) - 12(21) = 3

① - ②

17(x-15) - 12(y-21) = 0

17と12は互いに素なので

x-15 = 12k (k:整数)

y-21 = 17k

x = 12k + 15

y = 17k + 21

N = 17(12k + 15) + 7

= 204k + 255 + 7

= 204k + 262

k = 40 = 2 1078

$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & & -7 & \\ \hline & -1 & 6 & & \\ 1 & -1 & -5 & -1 & \\ 4 \overline{) 5} \overline{) 29} \overline{) 34} & & & & \\ \underline{4} & & 25 & 29 & \\ \hline & & 1 & 4 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 5 & & -7 & \\ \hline & -2 & 5 & & \\ 1 & -2 & -2 & -1 & \\ 2 \overline{) 5} \overline{) 12} \overline{) 17} & & & & \\ \underline{4} & & 10 & 12 & \\ \hline & & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

整数の性質④

19 次の等式を満たす自然数 x, y の組をすべて求めよ。

$$5x + 2y = 30 \quad \text{--- ①}$$

$$5(4) + 2(5) = 30 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①} - \text{②}$$

$$5(x-4) + 2(y-5) = 0$$

5と2は互いに素なので

$$x-4 = 2k \quad (k: \text{整数})$$

$$y-5 = 5k$$

$$x = 2k + 4 \geq 1 \quad \text{--- ③}$$

$$y = -5k + 5 \geq 1 \quad \text{--- ④}$$

$$\text{③} \Rightarrow y$$

$$2k \geq -3$$

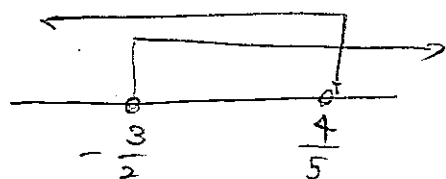
$$k \geq -\frac{3}{2} \quad \text{--- ⑤}$$

$$\text{④} \Rightarrow y$$

$$-5k \geq -4$$

$$k \leq \frac{4}{5} \quad \text{--- ⑥}$$

$$\text{⑤⑥} \Rightarrow y$$



$$-\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{4}{5}$$

$$-1.5 \leq k \leq 0.8$$

$$k = -1, 0$$

$$\text{③④} \Rightarrow x, y$$

$$(x, y) = (2, 10), (4, 5)$$

【循環小数】

20 次の分数を小数で直せ。循環小数は、 $0.\dot{3}$ のような表し方で書け。

(1) $\frac{7}{6}$

$$\begin{array}{r} 1.166 \\ 6 \overline{) 7} \\ \underline{6} \\ 10 \\ \underline{6} \\ 40 \\ \underline{36} \\ 40 \\ \underline{36} \\ 4 \end{array}$$

(2) $\frac{74}{33}$

$$\begin{array}{r} 2.242 \\ 33 \overline{) 74} \\ \underline{66} \\ 80 \\ \underline{66} \\ 140 \\ \underline{132} \\ 80 \end{array}$$

21 分数 $\frac{9}{13}$ を小数で表したとき、小数第100位の数字を求めよ。

$$\begin{array}{r} 0.6923076 \\ 13 \overline{) 90} \\ \underline{78} \\ 120 \\ \underline{117} \\ 30 \\ \underline{26} \\ 40 \\ \underline{39} \\ 100 \\ \underline{90} \\ 90 \end{array}$$

$$\frac{9}{13} = 0.692307\dot{6}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 6 \overline{) 100} \\ \underline{6} \\ 40 \\ \underline{36} \\ 4 \end{array}$$

$100 = 16 - 6 + 4$

$\therefore \text{--- } 3$

22 次の分数のうち、有限小数で表されるものをいえ。

$$\left(\frac{7}{4}\right), \left(\frac{5}{33}\right), \left(\frac{9}{40}\right), \left(\frac{10}{52}\right), \left(\frac{2}{55}\right), \left(\frac{1}{125}\right)$$

【 n 進法 \Rightarrow 10進法】

23 次の数を10進法で表せ。

(1) $100100_{(2)}$

$$\begin{aligned} &2^2 + 2^5 \\ &= 4 + 32 \\ &= \underline{36} \end{aligned}$$

(3) $1421_{(5)}$

$$\begin{aligned} &1 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3 \\ &= 1 + 10 + 100 + 125 \\ &= \underline{236} \end{aligned}$$

(2) $2012_{(3)}$

$$\begin{aligned} &2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 \\ &= 2 + 3 + 54 \\ &= \underline{59} \end{aligned}$$

(4) $106_{(7)}$

$$\begin{aligned} &6 \cdot 7^0 + 7^2 \\ &= 6 + 49 \\ &= \underline{55} \end{aligned}$$

24 次の数を10進法的小数で表せ。

(1) $0.0101_{(2)}$

$$\begin{aligned} &2^{-2} + 2^{-4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{5}{16} \\ &= \underline{0.3125} \end{aligned}$$

(2) $0.432_{(5)}$

$$\begin{aligned} &4 \cdot 5^{-1} + 3 \cdot 5^{-2} + 2 \cdot 5^{-3} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{3}{25} + \frac{2}{125} \\ &= \frac{100}{125} + \frac{15}{125} + \frac{2}{125} \\ &= \frac{117}{125} \\ &= \underline{0.936} \end{aligned}$$

【10進法 \Rightarrow n 進法】

25 次の10進数を[]内の表し方で表せ。

(1) 47 [2進法]

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 47} \\ \underline{223} \dots 1 \\ 2 \overline{) 11} \dots 1 \\ 2 \overline{) 5} \dots 1 \\ 2 \overline{) 2} \dots 1 \\ 2 \overline{) 1} \dots 0 \\ 0 \dots 1 \end{array}$$

$101111_{(2)}$

(2) 55 [2進法]

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 55} \\ \underline{227} \dots 1 \\ 2 \overline{) 13} \dots 1 \\ 2 \overline{) 6} \dots 1 \\ 2 \overline{) 3} \dots 0 \\ 2 \overline{) 1} \dots 1 \\ 0 \dots 1 \end{array}$$

$110111_{(2)}$

(3) 101 [3進法]

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 101} \\ 3 \overline{) 33} \dots 2 \\ 3 \overline{) 11} \dots 0 \\ 3 \overline{) 3} \dots 2 \\ 3 \overline{) 1} \dots 0 \\ 0 \dots 1 \end{array}$$

$10202_{(3)}$

(4) 634 [7進法]

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 634} \\ 7 \overline{) 90} \dots 4 \\ 7 \overline{) 12} \dots 6 \\ 7 \overline{) 1} \dots 5 \\ 0 \dots 1 \end{array}$$

$1564_{(7)}$

26 次の10進数を[]内の表し方で表せ。

(1) 0.8125 [2進法]

$$\begin{array}{r} 0.8125 \\ \times 2 \\ \hline 1.6250 \\ \underline{2} \\ 1.250 \\ \underline{2} \\ 0.50 \\ \underline{2} \\ 1.0 \end{array}$$

(2) 0.7136 [5進法]

$$\begin{array}{r} 0.7136 \\ \times 5 \\ \hline 3.5680 \\ \underline{5} \\ 2.840 \\ \underline{5} \\ 4.20 \\ \underline{5} \\ 1 \end{array}$$

$0.3241_{(5)}$