

積分法①

1 【不定積分】

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx \\ = \frac{1}{-2} x^{-2} + C \\ = -\frac{1}{2x^2} + C$$

$$(2) \int x^{\frac{1}{3}} dx \\ = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$$

$$(3) \int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx \\ = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C \\ = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$$

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ = 2x^{\frac{1}{2}} + C \\ = 2\sqrt{x} + C$$

2

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{x^2 - 4x + 1}{x^3} dx \\ = \int (x^{-1} - 4x^{-2} + x^{-3}) dx \\ = \log|x| + \frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + C \\ = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C \\ = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + C$$

$$(2) \int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx \\ = \int (x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}) dx \\ = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C \\ = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + C$$

$$(3) \int \frac{(\sqrt{y}-1)^2 dy}{y} \quad y > 0 \\ = \int \frac{y - 2\sqrt{y} + 1}{y} dy \\ = \int (1 - 2y^{-\frac{1}{2}} + y^{-1}) dy \\ = y - 4\sqrt{y} + \log|y| + C \\ = y - 4\sqrt{y} + \log y + C$$

$$(4) \int (3t^2 - \frac{1}{t})^2 dt \\ = \int (9t^4 - 6t + t^{-2}) dt \\ = \frac{9}{5} t^5 - 3t^2 - \frac{1}{t} + C$$

3

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (\cos x - 2\sin x) dx \\ = \sin x + 2\cos x + C$$

$$(2) \int \frac{2\cos^3 x - 1}{\cos^2 x} dx \\ = \int \left(2\cos x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx \\ = 2\sin x - \tan x + C$$

$$(3) \int 5^x dx \\ = \frac{5^x}{\log 5} + C$$

$$(4) \int (3^x - 2e^x) dx \\ = \frac{3^x}{\log 3} - 2e^x + C$$

$$(5) \int \frac{dx}{\tan^2 x} = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx \\ = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx \\ = -\frac{1}{\tan x} - x + C$$

4

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (3x+1)^4 dx \\ = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} (3x+1)^5 + C \\ = \frac{1}{15} (3x+1)^5 + C$$

$$(2) \int (4x-3)^{-3} dx \\ = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (4x-3)^{-2} + C \\ = -\frac{1}{8} (4x-3)^{-2} + C$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}} \\ = \int (1-2x)^{-\frac{1}{2}} dx \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2} (1-2x)^{\frac{1}{2}} + C \\ = -\frac{1}{2}\sqrt{1-2x} + C$$

$$(4) \int \frac{dx}{2x+1} \\ = \frac{1}{2} \log|2x+1| + C$$

5 【置換積分法】

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int x(1-x)^4 dx$$

$1-x=t$ やり $\int (t-1)t^4 dt$

$x=1-t$ $= \int (t^5 - t^4) dt$

$\frac{dx}{dt} = -1$ $= \frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{5}t^5 + C$

$dx = -dt$ $= -\frac{1}{30}t^5(5t-6) + C$

$= -\frac{1}{30}(1-x)^5(5x+1) + C$

$$(2) \int x\sqrt{2x-1} dx$$

$\sqrt{2x-1}=t$ やり $\int \frac{1}{2}(t^2+1)t - t dt$

$2x-1=t^2$ $= \frac{1}{2} \int (t^4 + t^2) dt$

$2x=t^2+1$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 \right) + C$

$x=\frac{1}{2}(t^2+1)$ $= \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{6}t^3 + C$

$\frac{dx}{dt}=t$ $= \frac{1}{30}t^3(3t^2+5) + C$

$dx=t dt$ $= \frac{1}{15}(3x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$

$\sqrt{x+1}=t$ やり $\int 2(t^2-1) dt$

$x+1=t^2$ $= 2 \left(\frac{1}{3}t^3 - t \right) + C$

$x=t^2-1$ $= \frac{2}{3}t^3 - 2t + C$

$\frac{dx}{dt}=2t$ $= \frac{2}{3}t(t^2-3) + C$

$dx=2t dt$ $= \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + C$

積分法②

6

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x^2 \sqrt{x^3 + 2} dx$

$$\begin{aligned} x^3 + 2 &= t \quad \text{とおく} & \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt \\ x^3 &= t - 2 & = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C \\ \frac{dx}{dt} \cdot 3x^2 &= 1 & = \frac{2}{9} (x^3 + 2) \sqrt{x^3 + 2} + C \\ dx &= \frac{1}{3x^2} dt & \end{aligned}$$

(2) $\int \sin^3 x \cos x dx$

$$\begin{aligned} \sin x &= t \quad \text{とおく} & \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C \\ \frac{dt}{dx} \cos x &= 1 & = \frac{1}{4} \sin^4 x + C \\ dx &= \frac{1}{\cos x} dt & \end{aligned}$$

3) $\int \frac{\log x}{x} dx$

$$\begin{aligned} \log x &= t \quad \text{とおく} & \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C \\ \frac{dx}{dt} \frac{1}{x} &= 1 & = \frac{1}{2} (\log x)^2 + C \\ dx &= x dt & \end{aligned}$$

7 【 $\frac{g'(x)}{g(x)}$ の不定積分】

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx$

$$= \log |x^2 + x - 1| + C$$

(2) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$

$$= \log |e^x + 1| + C$$

(3) $\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$$= \log |\sin x| + C$$

8 【部分積分法】

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x \sin x dx$

$$\begin{aligned} &= \int x (-\cos x)' dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

(2) $\int x e^{-x} dx$

$$\begin{aligned} &= \int x (-e^{-x})' dx \\ &= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx \\ &= -x e^{-x} - e^{-x} + C \\ &= -(x+1) e^{-x} + C \end{aligned}$$

9

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \log 2x dx$

$$\begin{aligned} &= \int (x)' \log 2x dx \\ &= \log 2x - \int x \frac{1}{2x} \cdot 2 dx \\ &= x \log 2x - x + C \end{aligned}$$

(2) $\int \log x^2 dx$

$$\begin{aligned} &= \int (x)' \log x^2 dx \\ &= x \log x^2 - \int x \frac{2x}{x^2} dx \\ &= x \log x^2 - 2 \int dx \\ &= x \log x^2 - 2x + C \end{aligned}$$

(3) $\int x \log x dx$

$$\begin{aligned} &= \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{4} x^2 + C \end{aligned}$$

10

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{x^2-1}{x+2} dx$

$$\begin{aligned} &= \int \left(x-2 + \frac{3}{x+2} \right) dx \quad \begin{array}{c} x-2 \\ 1-2 \\ \hline 1-2 \end{array} \\ &= \frac{1}{2} x^2 - 2x + 3 \log|x+2| + C \quad \begin{array}{c} -2-1 \\ -2-4 \\ \hline 3 \end{array} \end{aligned}$$

(2) $\int \frac{4x^2}{2x-1} dx$

$$\begin{aligned} &= \int \left(2x+1 + \frac{1}{2x-1} \right) dx \quad \begin{array}{c} 2x+1 \\ 2-1 \\ \hline 4-0 \\ 4-2 \\ \hline 2-0 \\ 2-1 \\ \hline 1 \end{array} \\ &= x^2 + x + \frac{1}{2} \log|2x-1| + C \end{aligned}$$

(3) $\int \frac{3}{x^2+x-2} dx$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{3}{(x+2)(x-1)} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \log|x-1| - \log|x+2| + C = \frac{\log \left| \frac{x-1}{x+2} \right|}{x} + C \end{aligned}$$

積分法③

11

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \cos^2 x dx$

$= \frac{1}{2} \int (\cos 2x + 1) dx$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x + x \right) + C$

$= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + C$

(2) $\int \sin^2 3x dx$

$= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 6x) dx$

$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{6} \sin 6x \right) + C$

$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin 6x + C$

(3) $\int \sin x \cos x dx$

$= \int \frac{1}{2} \sin 2x dx$

$= -\frac{1}{4} \cos 2x + C$

(4) $\int \cos 3x \cos 2x dx$

$\cos(3x+2x) = \cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x$

$\cos(3x-2x) = \cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x$

$2 \cos 3x \cos 2x = \cos 5x + \cos x$

$= \frac{1}{2} (\frac{1}{5} \sin 5x + \sin x) + C$

$= \frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x + C$

(5) $\int \sin x \sin 3x dx$

$\cos(3x+x) = \cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x$

$\cos(3x-x) = \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x$

$= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 4x) dx$

$2 \sin 3x \sin x = \cos 2x - \cos 4x$

$= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \sin 4x + C$

$= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x + C$

(6) $\int \sin 3x \cos 2x dx$

$\sin(3x+2x) = \sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x$

$\sin(3x-2x) = \sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x$

$= -\frac{1}{2} \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + C$

$= -\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + C$

12 【定積分】

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$

$= -[x^{-1}]_1^2$

$= -\left(\frac{1}{2} - 1\right)$

$= \frac{1}{2}$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta$

$= [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 1$

(5) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$

$= [\log|x|]_{-2}^{-1}$

$= \log 1 - \log 2$

$= -\log 2$

(6) $\int_{-1}^1 2^x dx$

$= \left[\frac{2^x}{\log 2} \right]_{-1}^1$

$= \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{2 \log 2}$

$= \frac{3}{2 \log 2}$

13

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^2 \sqrt{x+1} dx$

$= \frac{2}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2$

$= \frac{2}{3} (3^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}})$

$= \frac{2}{3} (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

(3) $\int_{-1}^1 (e^t - e^{-t}) dt$

$= \left[e^t + e^{-t} \right]_{-1}^1$

$= \left(e + \frac{1}{e} \right) - \left(\frac{1}{e} + e \right)$

$= 0$

(5) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$

$= \frac{1}{2} \int (\cos 2x + 1) dx$

$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2x + x \right]_0^{2\pi}$

$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi$

$= \frac{\pi}{4}$

(4) $\int_0^{\pi} \sin 2x dx$

$= \frac{1}{2} \left[-\cos 2x \right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{2} (-1 + 1)$

$= 0$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta d\theta$

$= \frac{1}{2} \int (\sin 6\theta + \sin 2\theta) d\theta$

$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{6} \cos 6\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) \right\}$

$= \frac{2}{3}$

積分法④

14 【絶対値のついた定積分】

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^4 |\sqrt{x} - 1| dx$$

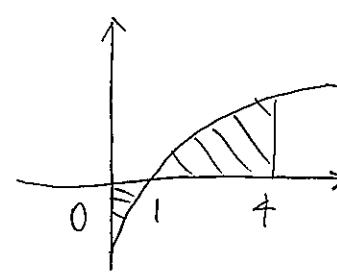
$$= - \int_0^1 (\sqrt{x} - 1) dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - 1) dx$$

$$= - \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x \right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x \right]_1^4$$

$$= - \left(\frac{2}{3} - 1 \right) + \left(\frac{16}{3} - 4 \right) - \left(\frac{2}{3} - 1 \right)$$

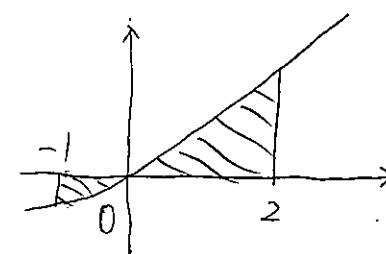
$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{\cancel{3}}$$



$$(2) \int_{-1}^2 |e^x - 1| dx$$

$$= - \int_{-1}^0 (e^x - 1) dx + \int_0^2 (e^x - 1) dx$$



$$= - \left[e^x - x \right]_{-1}^0 + \left[e^x - x \right]_0^2$$

$$= - \left\{ 1 - \left(\frac{1}{e} + 1 \right) \right\} + e^2 - 2 - 1$$

$$= \frac{1}{e} + 1 + e^2 - 4 = \frac{e^2 + \frac{1}{e} - 3}{\cancel{e}}$$

15 【置換積分】

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^1 x(1-x)^5 dx$$

$$1-x=t \quad \text{Let } t \in C$$

$$dt = -dx$$

$$\frac{dx}{dt} = -1$$

$$\frac{x}{t} \Big|_0^1 \rightarrow \frac{1}{\cancel{t}}$$

$$\int_0^1 (1-t)t^5 dt = \int_0^1 (t^5 - t^6) dt$$

$$= \left[\frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{7}t^7 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$$

$$= \frac{1}{42}$$

$$(2) \int_2^5 x\sqrt{x-1} dx$$

$$\sqrt{x-1} = t \quad \text{Let } t \in C$$

$$dt = \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$dx = 2t \cdot \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$dt = 2t^{\frac{3}{2}} dt$$

$$\frac{x}{t} \Big|_1^2 \rightarrow \frac{5}{\cancel{t}}$$

$$2 \int_1^2 (t^2 + 1)t^2 dt = 2 \int_1^2 (t^4 + t^2) dt$$

$$= 2 \left[\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 \right]_1^2$$

$$= 2 \left\{ \frac{32}{5} + \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) \right\}$$

$$= 2 \left(\frac{31}{5} + \frac{7}{3} \right)$$

$$= \frac{256}{15}$$

16 [$\sqrt{a^2 - x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ の定積分】

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$x = \sin \theta \quad \text{Let } \theta \in C$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$$

$$dx = \cos \theta d\theta$$

$$\frac{x}{\theta} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rightarrow \frac{1}{\cancel{\theta}}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx$$

$$x = 2 \sin \theta \quad \text{Let } \theta \in C$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta$$

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$\frac{x}{\theta} \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \rightarrow \frac{1}{\cancel{\theta}}$$

$$= 2 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2 \left\{ \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right\}$$

$$= 2 \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4 - 4 \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = 2 \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 4 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{\pi + \sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$(3) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$x = 2 \sin \theta \quad \text{Let } \theta \in C$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta$$

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$\frac{x}{\theta} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \rightarrow \frac{1}{\cancel{\theta}}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{4 - 4 \sin^2 \theta}} d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta - \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

積分法⑤

17 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+a^2}$ の定積分】

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$x = \tan \theta \quad \text{etc}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline x & 0 \rightarrow \sqrt{3} \\ \hline \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{3} \\ \hline \end{array}$$

$$(2) \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2+4}$$

$$x = 2\tan \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta}$$

$$dx = \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline x & -2 \rightarrow 2 \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta \right. \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

18 【偶関数、奇関数】

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_{-2}^2 (x^3 + 3x^2 + 4x + 5) dx$$

$$= 2 \int_0^2 (3x^2 + 5) dx$$

$$= 2 \left[x^3 + 5x \right]_0^2$$

$$= 2 - 18$$

$$= \underline{\underline{-16}}$$

$$(3) \int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2} dx$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$$(2) \int_{-1}^1 (e^x - e^{-x}) dx$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$$(4) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

$$= \frac{1}{2} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$= \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

19 【部分積分】

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^{\pi} x \sin x dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi} x (-\cos x) dx \\ &= \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \\ &= \pi + [\sin x]_0^{\pi} \\ &= \pi \end{aligned}$$

$$(2) \int_0^1 x e^x dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 x (e^x)' dx \\ &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - [e^x]_0^1 \\ &= e - (e - 1) = 1 \end{aligned}$$

$$(3) \int_1^2 x \log x dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \log x dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x^2 \log x \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \log 2 - \frac{1}{4} \left[x^2 \right]_1^2 \\ &= 2 \log 2 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

20 置換法

部分積分法によって、定積分 $\int_{-1}^1 (x+1)^3(x-1) dx$ を求めよ。

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4} (x+1)^4 \right)' (x-1) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[(x+1)^4 (x-1) \right]_{-1}^1 - \frac{1}{4} \left[(x+1)^4 \right]_{-1}^1$$

$$= - \frac{1}{20} \left[(x+1)^5 \right]_{-1}^1$$

$$= - \frac{1}{20} \cdot 2^5$$

$$= - \frac{32}{20}$$

$$= - \frac{8}{5}$$

21

定積分 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$ を求めよ。

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \cos x dx \\ &= \left[e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x) \sin x dx \\ &= -1 + \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \\ 2J &= -1 + e^{\frac{\pi}{2}}, \quad = J \\ J &= \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2} \end{aligned}$$

22

n は 0 または正の整数とする。定積分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ について、次の問いに答えよ。

ただし、 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$ である。

(1) I_0, I_1 を求めよ。

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \\ I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \end{aligned}$$

(2) $n \geq 2$ のとき、 $\sin^n x = \sin^{n-1} x \sin x = \sin^{n-1} x (-\cos x)'$ である。

I_n に部分積分法を適して、次のことを示せ。

$$n \geq 2 \text{ のとき } I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (-\cos x)' dx \\ &= - \left[\sin^{n-1} x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx \\ &= (n-1) \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right\} \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

(3) $n \geq 2$ のとき、次のことを示せ。

$$n \text{ が偶数のとき } I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$n \text{ が奇数のとき } I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$(2) \text{ エイ } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$n \text{ が偶数のとき } I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$n \text{ が奇数のとき } I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

23 【定積分と導関数】

次の関数を x で微分せよ。ただし、(2) では $x > 0$ とする。

$$\begin{aligned} (1) \int_0^x \sin t dt &= \underline{\sin x} \\ (2) \int_1^x t \log t dt &= \underline{x \log x} \end{aligned}$$

24

関数 $G(x) = \int_0^x (x-t)e^t dt$ について、 $G'(x)$ および $G''(x)$ を求めよ。

$$\begin{aligned} G(x) &= x \int_0^x e^t dt - \int_0^x t e^t dt \\ &= \int_0^x e^t dt + x e^x - x e^x \\ &= [e^t]_0^x \\ &= \underline{e^x - 1} \\ G''(x) &= \underline{e^x} \end{aligned}$$

25

関数 $\int_x^{3x} t \cos t dt$ を x で微分せよ。

$$f(t) = t \cos t \quad \text{とおく}$$

$$\begin{aligned} f(t) &\xrightarrow{\text{積分}} F(x) \\ \int_x^{3x} f(t) dt &= F(3x) - F(x) \end{aligned}$$

両端-ゼン

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_x^{3x} f(t) dt &= 3f(3x) - f(x) \\ &= 3 - 3x \cos 3x - x \cos x \\ &= \underline{9x \cos 3x - x \cos x} \end{aligned}$$

26

等式 $f(x) = x + \int_0^1 f(t) e^t dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$a = \int_0^1 f(t) e^t dt \quad \text{とおくと}$$

$$f(x) = x + a$$

$$f(t) = t + a$$

$$a = \int_0^1 (t+a) e^t dt$$

$$= \int_0^1 (t+a) (e^t)' dt$$

$$= [(t+a) e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt$$

$$= (1+a)e - a - (e-1)$$

$$= e + ae - a - e + 1$$

$$2a - ae = 1$$

$$a = \frac{1}{2-e}$$

$$\therefore f(x) = x + \frac{1}{2-e}$$

積分法⑦

27 【区分求積法】

右図のように区間 $[0, 1]$ を n 等分して n 個の長方形を作り、それらの面積の和を S_n とする。

長方形の面積の和を T_n とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = S$ となることを示せ。

$$T_n = \frac{1}{n} \left\{ 0 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \right\}$$

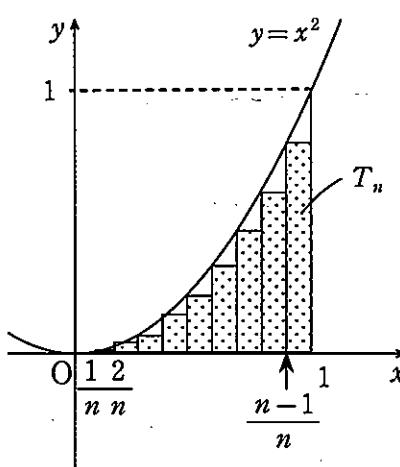
横 縦

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1)$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$



28

次の極限値を求めよ。

$$(1) S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} (1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{2}{n}\right)^4 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^4 \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (f(x) = x^4)$$

$$= \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} [x^5]_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$(2) S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \quad f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\log|1+x|]_0^1 = \log 2$$

29 【定積分と不等式】

次のことを示せ。

$$(1) x \geq 0 のとき \quad \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$x+1 \leq x^2+x+1$$

両辺 \oplus すると 逆数 \Rightarrow

$$\frac{1}{x^2+x+1} \leq \frac{1}{x+1}$$

$$(2) \log 2 > \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$$

(1) つまり

$$\frac{1}{x+1} > \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx > \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

よって

$$\log 2 > \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$$

30

関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ の定積分を利用して、次の不等式を証明せよ。

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \log(n+1) \quad \text{ただし, } n \text{ は自然数}$$

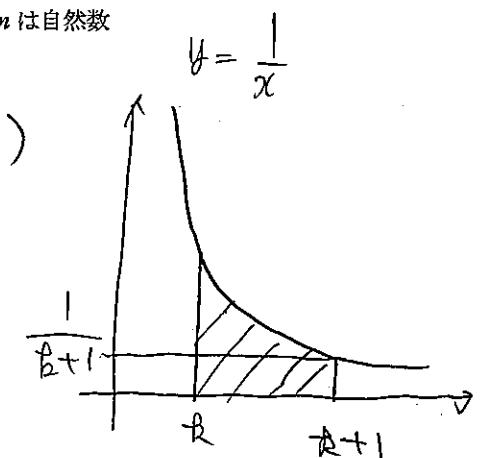
$k \leq x \leq k+1$ (k : 自然数)
逆数 $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k+1}$

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{x} < \frac{1}{k+1}$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{k} > \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$$



$k=1, 2, 3, \dots, n$ のときで重ねると

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

$$= [\log|x|]_1^{n+1}$$

$$= \log(n+1)$$

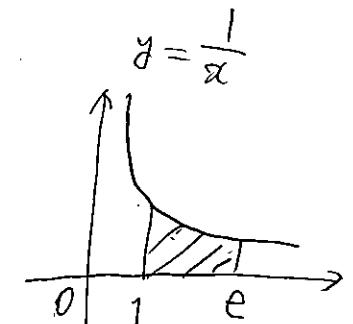
31

次の2直線、および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$(1) y = \frac{1}{x}, x=1, x=e$$

$$S = \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$= [\log x]_1^e = 1$$

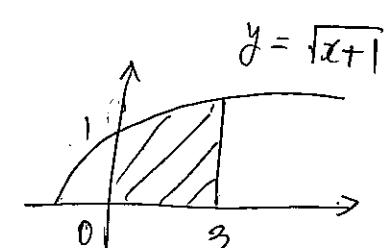


$$(2) y = \sqrt{x+1}, x=0, x=3$$

$$S = \int_0^3 \sqrt{x+1} dx$$

$$= \frac{2}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (8-1) = \frac{14}{3}$$



32

曲線 $y = e^x - e$ と x 軸および2直線 $x=0, x=2$ で囲まれた2つの部分の面積の和 S を求めよ。

$$e^x - e = 0 \quad x = \frac{1}{2} \text{ 附近}$$

$$e^x = e \quad y = \frac{1}{e} - e < 0$$

$$x=1$$



$$S = - \int_0^1 (e^x - e) dx + \int_1^2 (e^x - e) dx$$

$$= -[e^x - e]_0^1 + [e^x - e]_1^2$$

$$= -(e-1) + (e^2 - e) - (e-1) = e^2 - 2e + 1$$

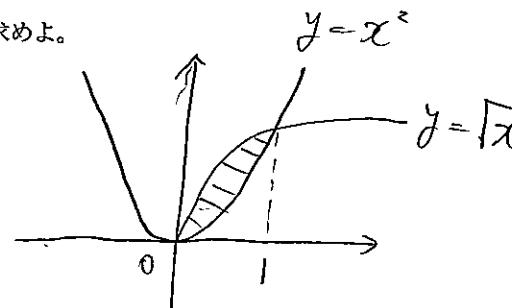
積分法⑧

33

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$(1) \quad y = x^2, \quad y = \sqrt{x}$$

① ② 互いに
 $x^2 = \sqrt{x}$
 $x = 0, 1$



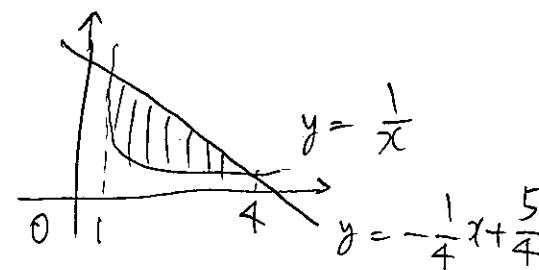
$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$(2) \quad x+4y=5, \quad xy=1$$

$$4y = -x + 5$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \quad \text{--- ①'}$$



$$\text{①' ② 互い}$$

$$x\left(-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}\right) = 1$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x - 1 = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + 1 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-4)(x-1) = 0$$

$$x = 1, 4$$

$$S = \int_1^4 \left(-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= - \int_1^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \right) dx$$

$$= - \left[\log|x| + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x \right]_1^4$$

$$= - \left(\log 4 + 2 - 5 - \frac{1}{8} + \frac{5}{4} \right)$$

$$= \frac{15}{8} - 2\log 2$$

34

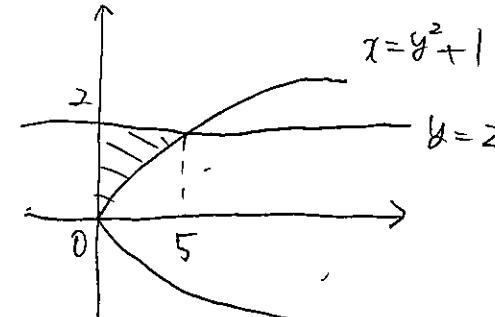
次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$(1) \quad x = y^2 + 1, \quad x \text{ 軸}, \quad y \text{ 軸}, \quad y = 2$$

$$S = \int_0^2 (y^2 + 1) dy$$

$$= \left[\frac{y^3}{3} + y \right]_0^2$$

$$= \frac{14}{3}$$



$$(2) \quad x = y^2 - 1, \quad x = y + 5$$

$$\text{① ② 互い}$$

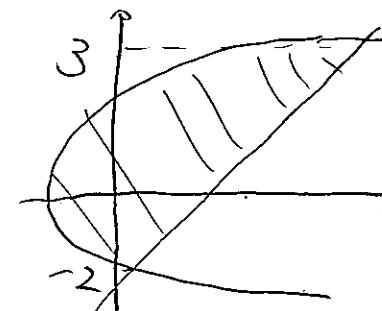
$$y^2 - 1 = y + 5$$

$$y^2 - y - 6 = 0$$

$$(y-3)(y+2) = 0$$

$$y = -2, 3$$

$$S = \int_{-2}^3 -(y-3)(y+2) dy = \frac{(3+2)^3}{6} = \frac{125}{6}$$



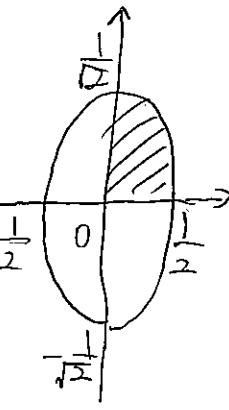
35

曲線 $4x^2 + 2y^2 = 1$ で囲まれた图形の面積 S を求めよ。

$$\frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1 \quad 2y^2 = 1 - 4x^2$$

$$y^2 = \frac{1}{2}(1 - 4x^2)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 4x^2}$$



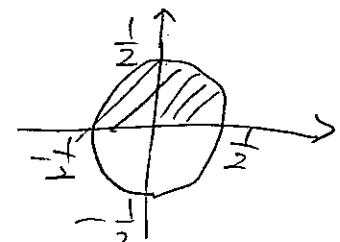
$$S = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - 4x^2} dx$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \pi$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \pi$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

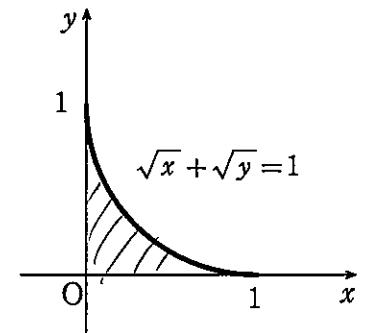


36

曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ は右の図のようになる。この曲線と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}$$

$$y = (1 - \sqrt{x})^2$$



$$S = \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 dx$$

$$= \int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x) dx$$

$$\approx \left[x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

37 【媒介変数表示の曲線と面積】

次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$x = 3\cos\theta, \quad y = 2\sin\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

$$\int_{-3}^3 y dx \quad \frac{dx}{d\theta} = -3\sin\theta \quad \begin{matrix} 0 \\ x \end{matrix} \Big|_3 \rightarrow -3 \rightarrow \pi$$

$$= \int_0^\pi 2\sin\theta - 3\sin\theta d\theta$$

$$= 6 \int_{-6}^{\pi} \sin^2\theta d\theta$$

$$= 3 \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$= 3 \left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \right]_0^\pi$$

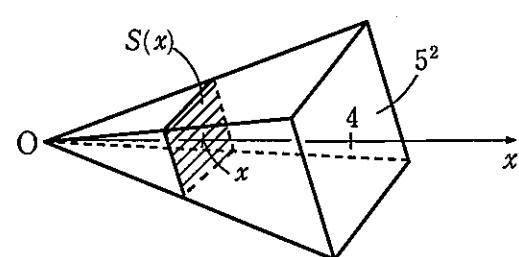
$$= \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

38 【角錐の体積と定積分】

四角錐の頂点を原点 O とし、頂点から底面に下ろした垂線を x 軸にとる。
 $0 \leq x \leq 4$ として、 x 軸上で座標が x である点を通り、 x 軸に垂直な平面でこの立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とする。
1 辺の長さが 5 の正方形を底面とする高さ 4 の四角錐の体積 V を求めよ。



$$\text{断面積} : \text{底面積} = x : 4^2$$

$$S(x) = 5^2 = x^2 = 4^2$$

$$S(x) = \frac{25x^2}{16}$$

$$V = \int_0^4 S(x) dx$$

$$= \frac{25}{16} \int_0^4 x^2 dx$$

$$= \frac{25}{48} \left[x^3 \right]_0^4$$

$$= \frac{25 \cdot 4^3}{48}$$

$$= \frac{100}{3}$$

解答 $\frac{100}{3}$ 39 【断面積 $S(x)$ と立体の体積 V 】

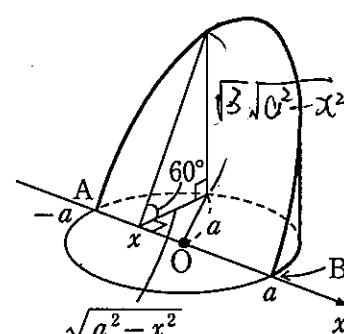
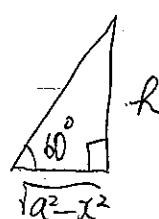
右図のように、底面の半径 a の直円柱を、底面の直径を含み底面と 60° の角をなす平面で切断する。

底面の直径 AB を x 軸に、中心を原点 O とする。座標が x ($-a \leq x \leq a$) である点を通り、 x 軸に垂直な平面で題意の立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とする。

このとき、底面とこの平面で挟まれた部分の体積 V を求めよ。

直円柱の高さ

$$h = \sqrt{3} \sqrt{a^2 - x^2}$$



断面積

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{a^2 - x^2}$$

体積

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-a}^a = \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ a^3 - \frac{1}{3} a^3 - \left(-a^3 + \frac{1}{3} a^3 \right) \right\}$$

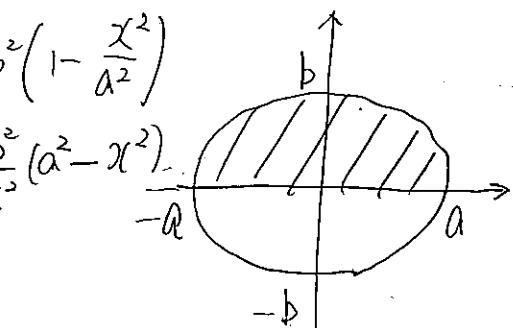
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3$$

解答 $\frac{2\sqrt{3}}{3} a^3$

40

$a > 0, b > 0$ とする。椭円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれた图形が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

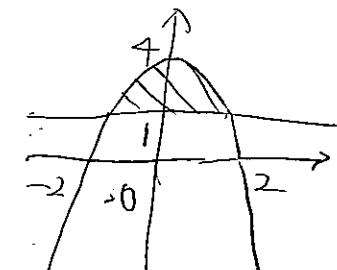
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a y^2 dx \\ &= \pi \int_{-a}^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx \\ &= \frac{\pi b^2}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx \\ &= \frac{\pi b^2}{a^2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 \\ &= \frac{4}{3} a b^2 \pi \end{aligned}$$

41 【 y 軸の周りの回転体の体積】

次の曲線と直線で囲まれた部分が、 y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$$(1) y = 4 - x^2, y = 1$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^4 x^2 dy \\ &= \pi \int_1^4 (4-y) dy \\ &= \pi \left[4y - \frac{1}{2} y^2 \right]_1^4 \\ &= \pi \left\{ (16 - 8) - \left(4 - \frac{1}{2} \right) \right\} = \frac{9}{2} \pi \end{aligned}$$



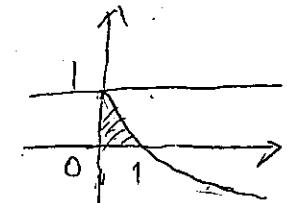
$$(2) y = 1 - \sqrt{x}, x \geq 0$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= 1 - y \\ x &= (\sqrt{x})^2 = (1-y)^2 \end{aligned}$$

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dy$$

$$= \pi \int_0^1 (1-y)^4 dy$$

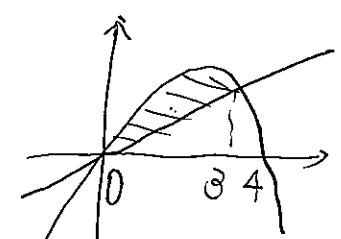
$$= -\frac{1}{5} \pi \left[(1-y)^5 \right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$



42 【円環体】

放物線 $y = 4x - x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分が、 x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4x \\ &= -x(x-4) \end{aligned} \quad \begin{aligned} r &= 4x - x^2 \\ &= x^2 - 4x + 16 \\ &= (x-4)^2 + 15 \end{aligned}$$



$$V = \pi \left(\text{大円の面積} - \text{小円の面積} \right)$$

$$V = \pi \int_0^3 (4x - x^2)^2 dx - \pi \int_0^3 x^2 dx$$

$$= \pi \left\{ \int_0^3 (16x^2 - 8x^3 + x^4) dx - \int_0^3 x^2 dx \right\}$$

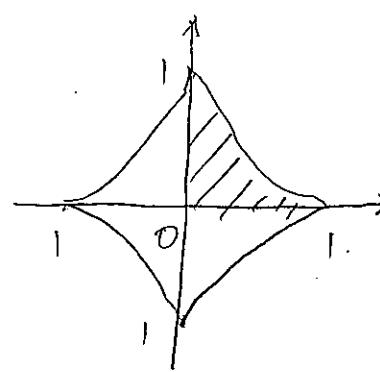
$$= \pi \int_0^3 (15x^2 - 8x^3 + x^4) dx$$

$$= \pi \left[5x^3 - 2x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^3 = \frac{108}{5} \pi$$

43 【媒介変数表示された曲線と回転体の体積】

アステロイド $x = \cos^3\theta$, $y = \sin^3\theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) で囲まれた図形が、 x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$$V = 2\pi \int_0^1 y^2 dx$$



$$\frac{dx}{d\theta} = -3\cos^2\theta - \sin\theta$$

$$dx = -3\sin\theta \cos^2\theta d\theta$$

$$\begin{array}{c|c} \theta & \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \\ \hline x & 0 \rightarrow 1 \end{array}$$

$$V = 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta \cos^2\theta d\theta$$

$$= 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta (-\sin^2\theta) d\theta$$

$$= 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^7\theta - \sin^9\theta) d\theta$$

$$= 6\pi \left(\frac{1}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \right)$$

$$= 6\pi \left(\frac{9 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 - 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \right)$$

$$= \frac{2(9-8)64 \cdot 2}{9 \cdot 7 \cdot 5} \pi = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 7 \cdot 5} \pi = \frac{48}{105} \pi //$$

44 【速度と位置】

数直線上を運動する点 P の速度が、時刻 t の関数として $v = 4 - 2t$ で与えられている。

$t=0$ における P の座標が 2 あるとき、 $t=3$ のときの P の座標を求めよ。

$$x = 2 + \int_0^3 (4-2t) dt$$

$$= 2 + [4t - t^2]_0^3$$

$$= \frac{5}{4}$$

45 【数直線上の運動と道のり】

数直線上を運動する点 P があり、時刻 t における P の速さは $v = \sin 2t$ であるとする。 $t=0$ から $t=\pi$ までに P が通過する道のり s を求めよ。

$$s = \int_0^\pi |\sin 2t| dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t) dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\sin 2t) dt$$

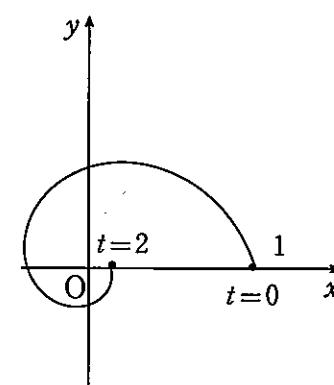
$$= \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2} \cos 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{4}$$

46 【座標平面上の運動と道のり】

座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 (x, y) が $x = e^{-t} \cos \pi t$, $y = e^{-t} \sin \pi t$ で表されるとき、 $t=0$ から $t=2$ までに P が通過する道のり s を求めよ。



$$s = \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -e^{-t} \cos \pi t - e^{-t} \pi \sin \pi t \\ &= -e^{-t} (\cos \pi t + \pi \sin \pi t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -e^{-t} \pi \sin \pi t + e^{-t} \pi \cos \pi t \\ &= -e^{-t} (\sin \pi t - \pi \cos \pi t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= e^{-2t} \{ \sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t + \pi^2 (\sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t) \} \\ &= e^{-2t} (1 + \pi^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{1+\pi^2} \int_0^2 e^{-t} dt = \sqrt{1+\pi^2} \left[-e^{-t} \right]_0^2 \\ &= \sqrt{1+\pi^2} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) // \end{aligned}$$

47 【サイクロイドの長さ】

曲線 $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) の長さ L を求めよ。

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2(1 - \cos t) & \frac{dy}{dt} &= 2\sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 4(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + 4\sin^2 t \\ &= 4 - 8\cos t + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{8} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt \quad \begin{cases} \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t \\ 2\sin^2 t = 1 - \cos 2t \\ 2\sin^2 \frac{t}{2} = 1 - \cos t \end{cases} \\ &= \sqrt{8} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 4 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -8 \left[\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = -8(-1 - 1) \\ &= 16 // \end{aligned}$$

48 【曲線の長さ】

曲線 $y = x\sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 5$) の長さ L を求めよ。

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$$

$$y = x^{\frac{3}{2}} \quad = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \left[\left(1 + \frac{9}{4}x \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^5$$

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \quad = \frac{8}{27} \left\{ \left(\frac{49}{4} \right)^{\frac{3}{2}} + 1 \right\}$$

$$= \frac{8}{27} \left(\frac{343}{8} - 1 \right)$$

$$= \frac{335}{27} //$$