

微分①

【平均変化率】

① 次の平均変化率を求めよ。

(1) 1次関数 $y = -3x + 1$ の $x=0$ から $x=3$ までの平均変化率

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{-8 - 1}{3} = \frac{-9}{3} = \underline{\underline{-3}}$$

(2) 1次関数 $y = 2x$ の, $x=a$ から $x=b$ までの平均変化率

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{2b - 2a}{b - a} = \frac{2(b - a)}{b - a} = \underline{\underline{2}}$$

(3) 2次関数 $y = -x^2$ の, $x=2$ から $x=2+h$ までの平均変化率

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{(2+h) - 2} &= \frac{-(2+h)^2 - (-2^2)}{h} \\ &= \frac{-4 - 4h - h^2 + 4}{h} \\ &= \frac{-4h - h^2}{h} = \underline{\underline{-4 - h}} \end{aligned}$$

【微分係数】

② 定義に従って, 次の微分係数を求めよ。

(1) $f(x) = 2x - 3$ ($x=0$)

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - 3 - (-3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2 = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

(2) $f(x) = x^2$ ($x=1$)

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

【導関数】

③ 次の関数を定義に従って微分せよ。

(1) $f(x) = 3x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) - 3x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 3 = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

(2) $f(x) = -x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h)^2 - (-x^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x^2 - 2hx - h^2 + x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2hx - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-2x - h) = \underline{\underline{-2x}} \end{aligned}$$

【導関数の計算】

④ 次の関数を微分せよ。

(1) $y = 4x^3 - 2x^2 - 5x$

$$y' = 12x^2 - 4x - 5$$

(2) $y = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$

$$y' = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$$

(3) $y = x(x+2)(x-2)$

$$\begin{aligned} &= x(x^2 - 4) \\ &= x^3 - 4x \\ y' &= 3x^2 - 4 \end{aligned}$$

(4) $y = 3(x^2 - 2)^2$

$$\begin{aligned} &= 3(x^4 - 4x^2 + 4) \\ &= 3x^4 - 12x^2 + 12 \\ y' &= 12x^3 - 24x \end{aligned}$$

【いろいろな文字による微分】

⑤ 次の関数を [] 内の文字で微分せよ。

(1) $s = 3t^2 - 4t + 2$ [t]

$$s' = 6t - 4$$

(2) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ [r]

$$V' = 4\pi r^2$$

【微分係数を用いた関数の決定】

⑥ 次の条件をすべて満たす2次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f'(0) = -3, f'(1) = 1, f(0) = 2$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(0) = -3 \text{ である}$$

$$f'(0) = b = -3 \quad \text{--- ①}$$

$$f'(1) = 1 \text{ である}$$

$$f'(1) = 2a + b = 1 \quad \text{--- ②}$$

$$f(0) = 2 \text{ である}$$

$$f(0) = c = 2 \quad \text{--- ③}$$

$$\text{① と ② を①で}$$

$$2a = 4$$

$$a = 2$$

$$b = -3$$

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2$$

【曲線上の点における接線の方程式】

7 関数 $y=2x^2-4x+3$ のグラフ上に点 A(2, 3) をとる。

(1) 点 A における接線の傾きを求めよ。

$$f'(x) = 4x - 4$$

$$f'(2) = 8 - 4 = 4$$

(2) 点 A における接線の方程式を求めよ。

$$y - 3 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 8 + 3$$

$$y = 4x - 5$$

【曲線上にない点から引いた接線の方程式】

8 関数 $y=x^2-2x+4$ のグラフに原点 O から引いた接線の方程式を求めよ。

接点 (t, t^2-2t+4) とおく

傾きは

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$f'(t) = 2t - 2$$

接線の方程式は

$$y - (t^2 - 2t + 4) = (2t - 2)(x - t)$$

$$y = (2t - 2)x - t(2t - 2) + (t^2 - 2t + 4)$$

$$y = (2t - 2)x - t^2 + 4$$

$(0, 0)$ を通るので

$$0 = -t^2 + 4$$

$$t^2 = 4$$

$$t = \pm 2$$

$$t = 2$$

$$t = 2 \text{ のとき } y = 2x$$

$$t = -2 \text{ のとき } y = -6x$$

【関数の増減】

9 次の関数の増減を調べよ。

(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

$$f'(x) = 0 \text{ のとき}$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

$$x = 0, 4$$

x	...	0	...	4	...
f'	+	0	-	0	+
f	↗	5	↘	-27	↗

(2) $f(x) = -x^3$

$$f'(x) = -3x^2$$

$$f'(x) = 0 \text{ のとき}$$

$$-3x^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0 \text{ (重解)}$$

x	...	0	...
f'	-	0	-
f	↘	0	↘

【関数の増減とグラフ】

10 次の関数の増減を調べ、極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

(1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

$$y' = 3x^2 - 12x + 9$$

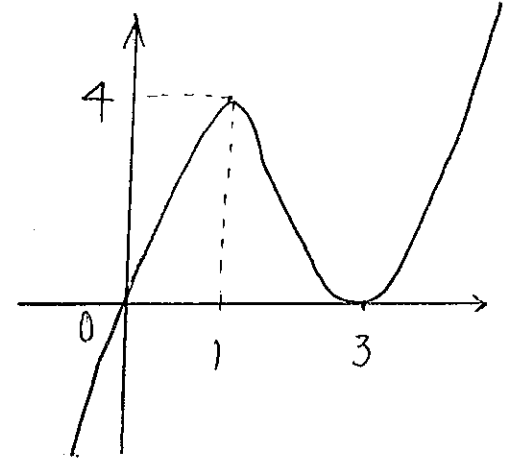
$$y' = 0 \text{ のとき}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

$$x = 1, 3$$

x	...	1	...	3	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	4	↘	0	↗



極大値 4 ($x=1$)

極小値 0 ($x=3$)

(2) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$

$$y' = -3x^2 + 6x$$

$$y' = 0 \text{ のとき}$$

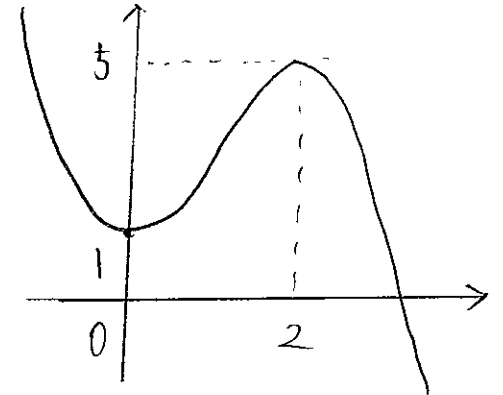
$$-3x^2 + 6x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0, 2$$

x	...	0	...	2	...
y'	-	0	+	0	-
y	↘	1	↗	5	↘



極大値 5 ($x=2$)

極小値 1 ($x=0$)

(3) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$

$$y' = 3x^2 - 6x + 3$$

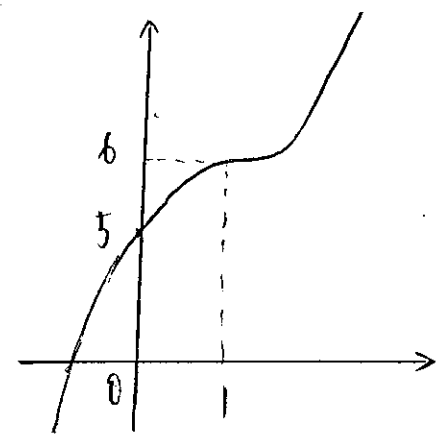
$$y' = 0 \text{ のとき}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x = 1 \text{ (重解)}$$

x	...	1	...
y'	+	0	+
y	↗	6	↗



極値なし



【4次関数のグラフ】

11 次の関数の増減を調べ、極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

(1) $y = x^4 - 8x^2 + 2$

$y' = 4x^3 - 16x$

$y' = 0$ のとき

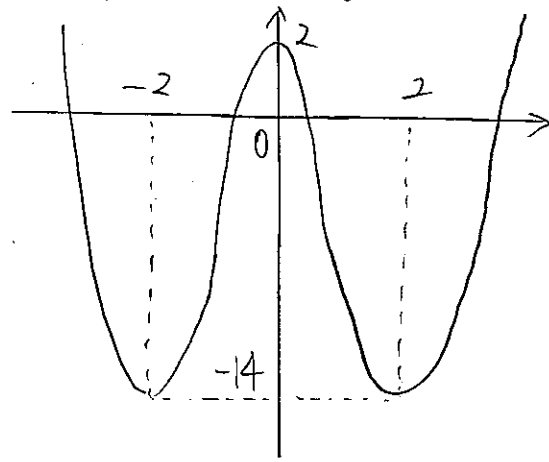
$x^3 - 4x = 0$

$x(x^2 - 4) = 0$

$x(x+2)(x-2) = 0$

$x = -2, 0, 2$

x	...	-2	...	0	...	2	...
f'	-	0	+	0	-	0	+
f	↘	-14	↗	2	↘	-14	↗



極大値 0 ($x=0$)

極小値 -14 ($x=\pm 2$)

(2) $y = 3x^4 - 4x^3 - 12$

$y' = 12x^3 - 12x^2$

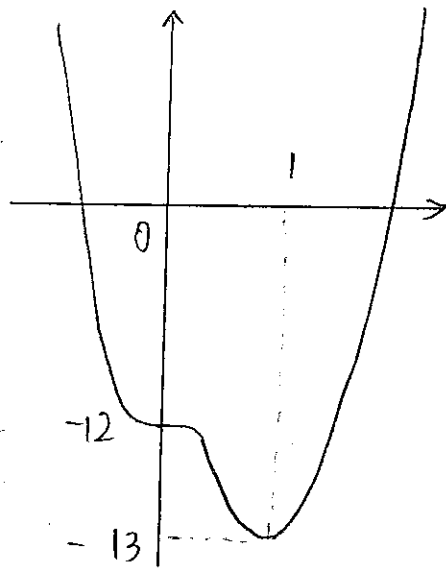
$y' = 0$ のとき

$x^3 - x^2 = 0$

$x^2(x-1) = 0$

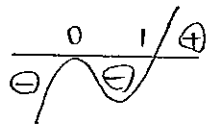
$x = 0$ (重解), 1

x	...	0	...	1	...
f'	-	0	-	0	+
f	↘	-12	↘	-13	↗



極大値 -12

極小値 -13 ($x=1$)



【関数の最大・最小】

12 次の関数の最大値、最小値を求めよ。

(1) $y = x^3 + 3x^2$ ($-3 \leq x \leq 2$)

$y' = 3x^2 + 6x$

$y' = 0$ のとき

$x^2 + 2x = 0$

$x(x+2) = 0$

$x = -2, 0$

x	-3	...	-2	...	0	...	2
y'		+	0	-	0	+	
y	0	↗	4	↘	0	↗	20

Max 20 ($x=2$)

min 0 ($x=-3, 0$)

(2) $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 3$ ($-2 \leq x \leq 1$)

$y' = -6x^2 + 6x + 12$

$y' = 0$ のとき

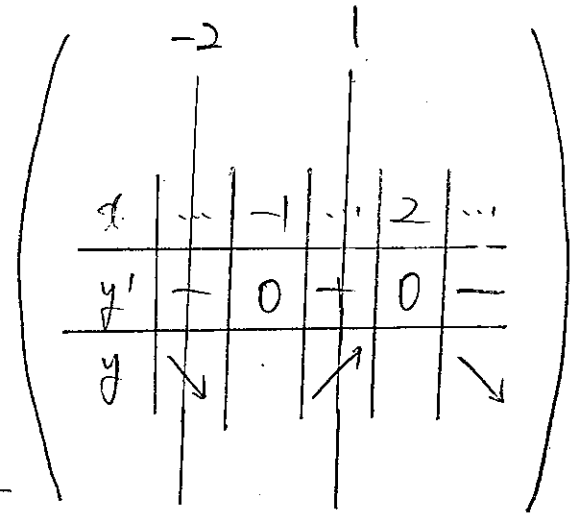
$6x^2 - 6x - 12 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x = -1, 2$

x	-2	...	-1	...	1
y'		-	0	+	
y	1	↘	-10	↗	10



Max 10 ($x=1$)

min -10 ($x=-1$)

【極値と関数の決定】

13 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + b$ が $x = -1$ で極大値 8 をとるとき、定数 a, b の値を求めよ。また、極小値を求めよ。

$f(-1) = 8$ より

$f(-1) = -1 + a + 9 + b$

$= a + b + 8 = 8$

$a + b = 0$ — ①

$f'(-1) = 0$ より

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 9$

$f'(-1) = 3 - 2a - 9$

$= -2a - 6 = 0$

$2a + 6 = 0$

$a = -3$ — ②

①② より

$a = -3, b = 3$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) = 0$ のとき

$3x^2 - 6x - 9 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

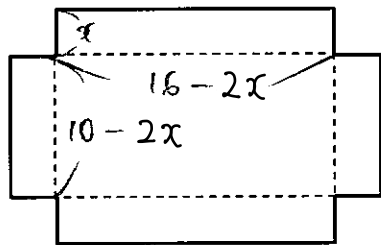
$x = -1, 3$

x	...	-1	...	3	...
f'	+	0	-	0	+
f	↗	8	↘	-24	↗

極小値 -24 ($x=3$)

【図形の最大・最小】

14 縦10 cm, 横16 cmの長方形の厚紙の四隅から、同じ大きさの正方形を右の図のように切り取って、ふたのない箱を作る。箱の容積を最大にするには、切り取る正方形の1辺の長さを何 cm にすればよいか。



1辺の長さ x cm

容積 y と y'

$$\begin{cases} x > 0 \\ 16 - 2x > 0 \\ 10 - 2x > 0 \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x < 8 \\ x < 5 \end{cases} \quad 0 < x < 5$$

$$\begin{aligned} y &= (10 - 2x)(16 - 2x)x \\ &= (160 - 32x - 20x + 4x^2)x \\ &= (160 - 52x + 4x^2)x \\ &= 4x^3 - 52x^2 + 160x \end{aligned}$$

$$y' = 12x^2 - 104x + 160$$

$$y' = 0 \text{ となる } x$$

$$12x^2 - 104x + 160 = 0$$

$$3x^2 - 26x + 40 = 0$$

$$(3x - 20)(x - 2) = 0$$

$$x = 2, \frac{20}{3} \text{ (不適)}$$

x	0	...	2	...	10
y'		+	0	-	
y			↗ Max	↘	

	0	...	2	...	5	...	$\frac{20}{3}$...
y'		+	0	-	0	+		
y			↗		↘			↗

$y = 2$ 2 cm

【実数解の個数[1]】

15 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1) $2x^3 - 6x + 3 = 0$

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 3$$

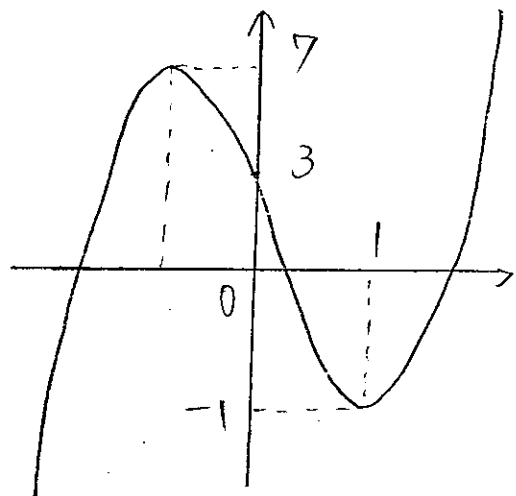
$$f'(x) = 6x^2 - 6$$

$$f'(x) = 0 \text{ となる } x$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x+1)(x-1) = 0$$

$$x = -1, 1$$



$y = 2$ 3

x	...	-1	...	1	...	
f'		+	0	-	0	+
f		↗	7	↘	-1	↗

(2) $-x^4 + 4x^3 - 4x^2 = 0$

$$f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2$$

$$f'(x) = 0 \text{ となる } x$$

$$-4x^3 + 12x^2 - 8x = 0$$

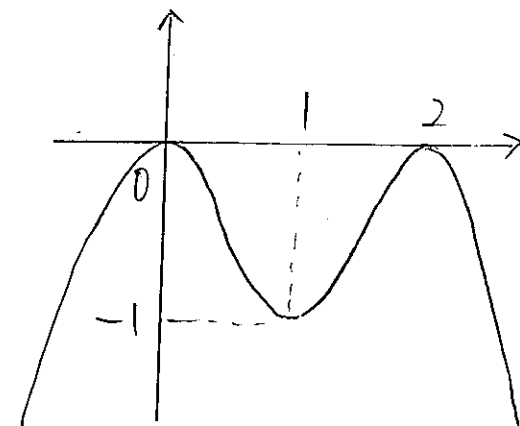
$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$x(x-2)(x-1) = 0$$

$$x = 0, 1, 2$$

x	...	0	...	1	...	2	...	
f'		+	0	-	0	+	0	-
f		↗	0	↘	-1	↗	0	↘



$y = 2$ 2

【実数解の個数[2]】

16 方程式 $2x^3 - 3x^2 - a = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$$2x^3 - 3x^2 = a$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

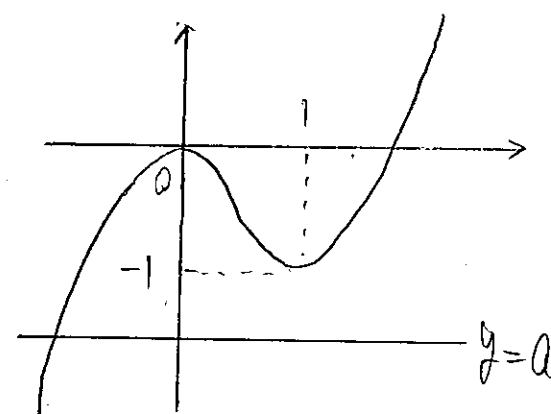
$$f'(x) = 0 \text{ となる } x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 0, 1$$

x	...	0	...	1	...	
f'		+	0	-	0	+
f		↗	0	↘	-1	↗



$0 < a$ となる x 1個

$a = 0$ となる x 2個

$-1 < a < 0$ となる x 3個

$a = -1$ となる x 2個

$a < -1$ となる x 1個

【不等式の証明】

17 $x \geq 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

$$x^3 + 3x^2 + 5 \geq 9x$$

(左辺) - (右辺) ≥ 0 を示す

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

$$f'(x) = 0 \text{ となる } x$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$x = -3, 1$$

x	0	...	1	...
f'		-	0	+
f	5	↘	0	↗

Min 0 ($x=1$) となる

(左辺) \geq (右辺)

等号成立は $x=1$

	0	...	-3	...	1	...
f'		+	0	-	0	+
f		↗		↘		↗