1 【合同式の性質】

次の合同式を解け。

(1) $x+4\equiv 2 \pmod 6$

$x\equiv -2 \pmod 6$

$x\equiv 4 \pmod 6$

(2) $x-7\equiv 6 \pmod 7$

$x\equiv 13 \pmod 7$

$x\equiv 6 \pmod 7$

(3) $3x\equiv 4 \pmod 5$

$6x\equiv 8 \pmod 5$

$x\equiv 3 \pmod 5$

(4) $4x\equiv 5 \pmod{11}$

$12x\equiv 15 \pmod{11}$

$x\equiv 4 \pmod{11}$

(5) $6x\equiv 3 \pmod 9$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$6x$	0	6	3	0	6	3	0	6	3

$x\equiv 2, 5, 8$

2 【合同式の利用】

合同式を利用して，次のものを求めよ。

(1) 13^{100} を 9 で割った余り

$13\equiv 4 \pmod 9$

$13^{100}\equiv 4^{100} \pmod 9$

$4^{100}=(4^3)^{33}\cdot 4$

$(4^3)^{33}\cdot 4\equiv 4 \pmod 9$

4^1	4^2	4^3
4	7	1

(2) 2000^{2000} を 12 で割った余り

$2000\equiv 8 \pmod{12}$

$2000^{2000}\equiv 8^{2000} \pmod{12}$

$8^{2000}\equiv 4 \pmod{12}$

8	8^2	8^3	8^4	8^5
8	4	8	4	8

(2) 47^{2011} の一の位の数

10で割った余り

$47\equiv 7 \pmod{10}$

$47^{2011}\equiv 7^{2011} \pmod{10}$

$7^{2011}=(7^4)^{502}\cdot 7^3$

$7^{2011}\equiv 1\cdot 7^3\equiv 3 \pmod{10}$

7	7^2	7^3	7^4
7	9	3	1

$2011 \div 4$: 502 ... 20, 11, 8, 3

3 【合同式を利用した証明】

(1) n が自然数のとき，n^3+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。

あ $n\equiv 1$ のとき

$n^3+1\equiv 2 \pmod 3$

い $n\equiv 2$ のとき

$n^3+1\equiv 3\equiv 0 \pmod 3$

う $n\equiv 0$ のとき

$n^3+1\equiv 1 \pmod 3$

よって

$n\equiv 2$ のとき

$n=3k+2$ ($k=0,1,2\cdots$)

(2) n が自然数のとき，n^6+1 は 3 で割り切れないことを証明せよ。

あ $n\equiv 1$ のとき

$n^6+1\equiv 2 \pmod 3$

い $n\equiv 2$ のとき

$n^6+1\equiv 2 \pmod 3$

う $n\equiv 0$ のとき

$n^6+1\equiv 1 \pmod 3$

よって

n^6+1 は3で割り切れない

4

a，b は 3 で割り切れない整数とする。このとき，$a^4+a^2b^2+b^4$ は 3 で割り切れることを証明せよ。

あ $a\equiv 1, b\equiv 1$ のとき

$1+1+1=3\equiv 0$

う $a\equiv 2, b\equiv 1$ のとき

$1+1+1\equiv 0$

い $a\equiv 1, b\equiv 2$ のとき

$1+1+1\equiv 3\equiv 0$

え $a\equiv 2, b\equiv 2$ のとき

$1+1+1\equiv 0$

よって

$a^4+a^2b^2+b^4$ は3で割り切れる

5

n は奇数とする。このとき，次のことを証明せよ。

(1) n^2-1 は 8 の倍数である。

$n\equiv 1, 3, 5, 7 \pmod 8$

n	1	3	5	7
n^2	1	1	1	1
n^2-1	0	0	0	0

よって

n^2-1 は8の倍数（n:奇数）

(2) n^5-n は 3 の倍数である。

$n\equiv 0, 1, 2$

n	0	1	2
n^5	0	1	2
n^5-n	0	0	0

1	3	5	7	9	11
1	0	2	1	0	2

よって

n^5-n は3の倍数（n:奇数）

(3) n^5-n は 120 の倍数である。

$n^5-n=n(n^4-1)=n(n^2+1)(n^2-1)$

(1)より 8の倍数

(2)より 3の倍数

よって n^5-n が5の倍数を示せばよい

n	0	1	2	3	4
n^5	0	1	2	3	4
n^5-n	0	0	0	0	0

よって

n^5-n は120の倍数（n:奇数）