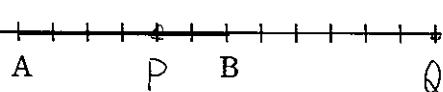


図形の性質①

1年 組 番 氏名

【内分・外分】

- 1 線分 AB を 2:1 に内分する点 P と、線分 AB を 2:1 に外分する点 Q を下の図にしろ。



【角の二等分線】

- 2 $AB=10$, $BC=12$, $AC=6$ である $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする。次のものを求めよ。

- (1) $BD : DC$

$$10 = 6 = \frac{5}{3}$$

- (2) 線分 BD の長さ

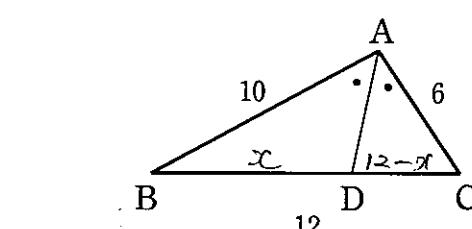
$$BD = x \text{ とおくと}$$

$$5 : 3 = x : 12 - x$$

$$3x = 60 - 5x$$

$$8x = 60$$

$$x = \frac{15}{2}$$



- 3 $AB=20$, $BC=10$, $AC=15$ である $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とする。線分 BD の長さを求めよ。

$$BD : CD = 20 : 15 = 4 : 3$$

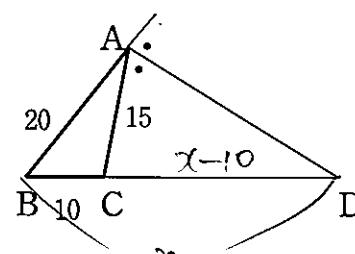
$$BD = x \text{ とおくと}$$

$$4 : 3 = x : x - 10$$

$$3x = 4x - 40$$

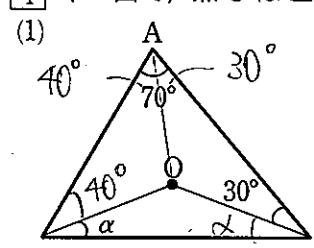
$$x = 40$$

$$\therefore BD = 40$$

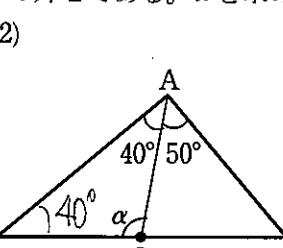


【外心】

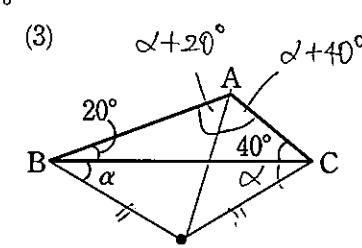
- 4 下の図で、点 O は $\triangle ABC$ の外心である。 α を求めよ。



$$70^\circ + (40^\circ + \alpha) + (30^\circ + \alpha) = 180^\circ \\ 2\alpha = 40^\circ \\ \alpha = 20^\circ$$



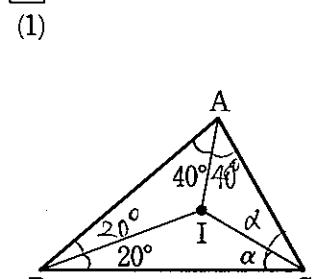
$$\alpha = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$



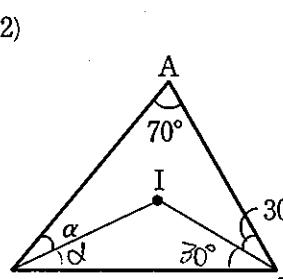
$$20^\circ + 40^\circ + (\alpha + 60^\circ) = 180^\circ \\ 2\alpha = 60^\circ \\ \alpha = 30^\circ$$

【内心】

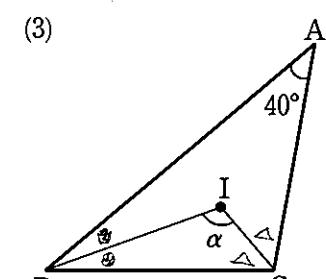
- 5 下の図で、点 I は $\triangle ABC$ の内心である。 α を求めよ。



$$40^\circ + 80^\circ + 2\alpha = 180^\circ \\ 2\alpha = 60^\circ \\ \alpha = 30^\circ$$



$$70^\circ + 60^\circ + 2\alpha = 180^\circ \\ 2\alpha = 50^\circ \\ \alpha = 25^\circ$$



$$2\alpha + 2\Delta + 40^\circ = 180^\circ \\ 2\alpha + 2\Delta < 140^\circ \\ \alpha + \Delta = 70^\circ \\ \alpha = 180^\circ - (\alpha + \Delta) \\ = 180^\circ - 70^\circ \\ = 110^\circ$$

- 6 $AB=4$, $BC=5$, $CA=3$ である $\triangle ABC$ の内心を I とする。直線 AI と辺 BC の交点を D とするとき、次のものを求めよ。

- (1) 線分 BD の長さ

$$BD : DC = 4 : 3$$

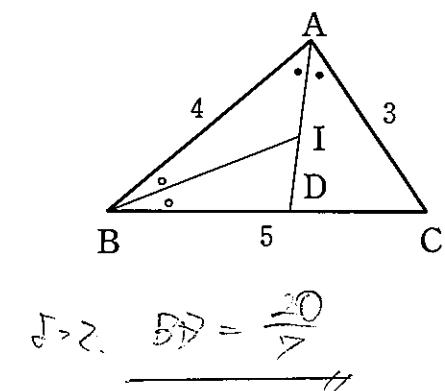
$$BD = x \text{ とおくと}$$

$$4 : 3 = x : (5 - x)$$

$$3x = 20 - 4x$$

$$7x = 20$$

$$x = \frac{20}{7}$$



$$\therefore BD = \frac{20}{7}$$

- (2) $AI : ID$

$$AI : ID = 4 : \frac{20}{7}$$

$$= 28 : 20$$

$$= 7 : 5$$

【重心】

- 7 次の図において、点 G は $\triangle ABC$ の重心である。 x , y の値を求めよ。

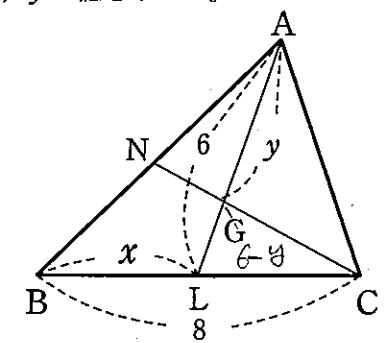
$$x = 4$$

$$y = 6 - y = 2 : 1$$

$$2(6 - y) = y \quad 3y = 12$$

$$12 - 2y = y$$

$$y = 4$$



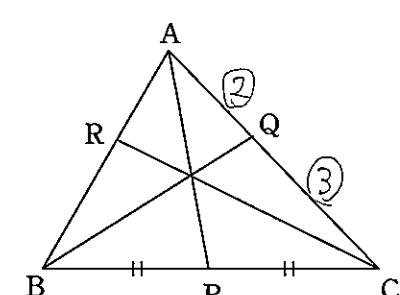
【シェバの定理】

- 8 次の図の $\triangle ABC$ において、 $AQ : QC = 2 : 3$, $BP = PC$ である。

- $AR : RB$ を求めよ。

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \quad (\text{シェバ})$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{2}{3}$$



$$\therefore AR : RB = 2 : 3$$

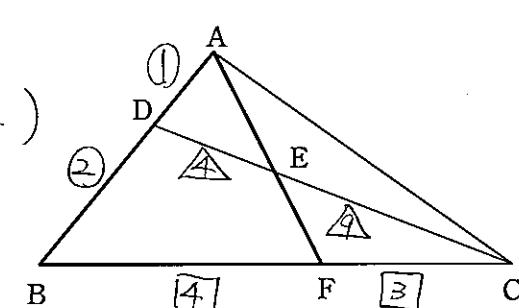
【メネラウスの定理】

- 9 次の図の $\triangle ABC$ において、 $AD : DB = 1 : 2$, $CE : ED = 9 : 4$ とするとき、次の比を求めよ。

- (1) $BF : FC$

$$\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{FC}{BF} = 1 \quad (\text{メネラウス})$$

$$\frac{FC}{BF} = \frac{3}{4}$$



$$\therefore BF : FC = 4 : 3$$

- (2) $AE : EF$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{EF}{AE} \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad (\text{メネラウス})$$

$$\frac{EF}{AE} = \frac{6}{7}$$

$$\therefore AE : EF = 7 : 6$$

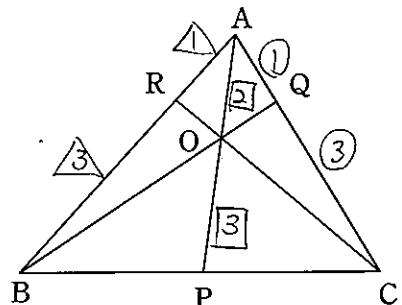
図形の性質②

- 10 $\triangle ABC$ の辺 AB, AC を 1:3 に内分する点を、それぞれ R, Q とする。線分 BQ と CR の交点を O とし、直線 AO と辺 BC の交点を P とする。

(1) $BP:PC$ を求めよ。

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} = 1 \quad (\text{エバ})$$

$$\frac{BP}{PC} = 1$$



∴ $BP:PC = 1:1$

$$BP:PC = 1:1$$

(2) $\triangle OBC : \triangle ABC$ を求めよ。

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{PO}{OA} \cdot \frac{1}{3} = 1 \quad (\text{メラウス})$$

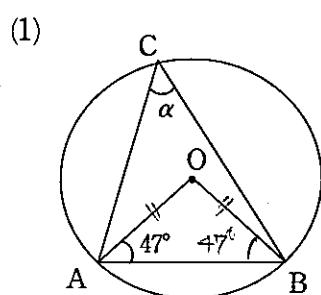
$$\frac{PO}{OA} = \frac{3}{2}$$

$$PO:OA = 3:2$$

$$\triangle OBC : \triangle ABC = 3:5$$

【円周角の定理】

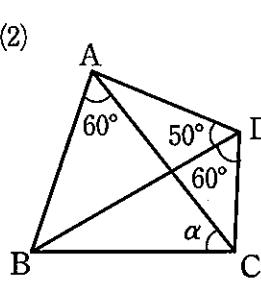
- 11 下の図において、 α, β を求めよ。ただし、O は円の中心である。



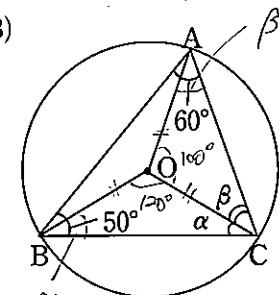
$$\angle AOB = 180^\circ - 94^\circ = 86^\circ$$

$$2\alpha = 86^\circ$$

$$\alpha = 43^\circ$$



$$\angle AOD = 50^\circ$$



$$\alpha + \alpha + 120^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha = 60^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

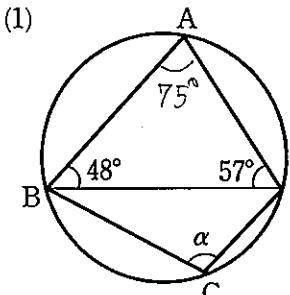
$$\beta + \beta + 100^\circ = 180^\circ$$

$$2\beta = 80^\circ$$

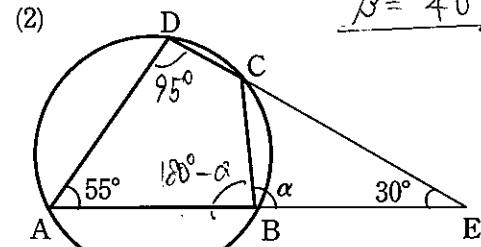
$$\beta = 40^\circ$$

【円に内接する四角形】

- 12 下の図において、 α を求めよ。



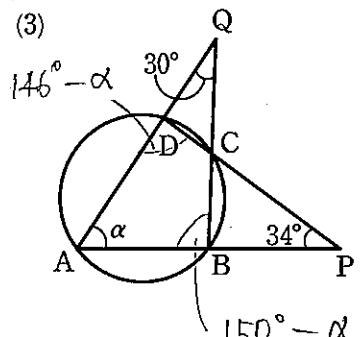
$$180 - 75^\circ = 105^\circ$$



$$\angle ADE = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$$

$$(180^\circ - \alpha) + 95^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 95^\circ$$



$$146^\circ - \alpha + 150^\circ - \alpha = 180^\circ$$

$$2\alpha = 116^\circ$$

$$\alpha = 58^\circ$$

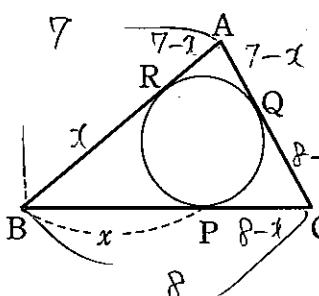
【接線の長さ】

- 13 $\triangle ABC$ において、 $AB=7$, $BC=8$ であるとする。この三角形の内接円と辺 BC, CA, ABとの接点を、それぞれ P, Q, R とするとき、次の問い合わせに答えよ。

(1) BP の長さを x とするとき、AQ と QC の長さを、それぞれ x で表せ。

$$AB = 7 - x$$

$$CQ = 8 - x$$



(2) CA=5 であるとき、BP の長さを求めよ。

$$(7-x) + (8-x) = 5$$

$$-2x + 15 = 5$$

$$2x = 10$$

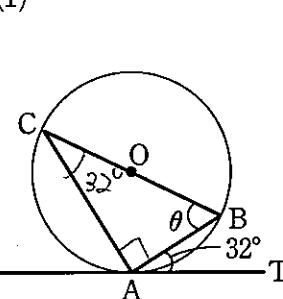
$$x = 5$$

∴ $BP = 5$

【接弦定理】

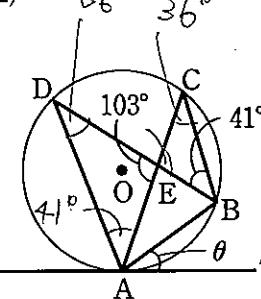
- 14 下の図において、直線 AT は円 O の接線、A はその接点である。角 θ を求めよ。

(1)



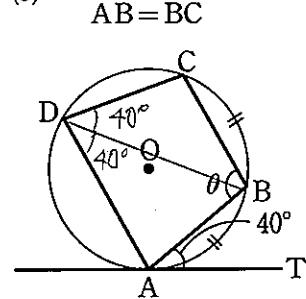
$$\theta = 58^\circ$$

(2)



$$\theta = 36^\circ$$

(3)

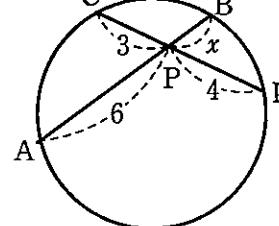


$$\theta = 100^\circ$$

【方べきの定理】

- 15 下の図において、 x の値を求めよ。

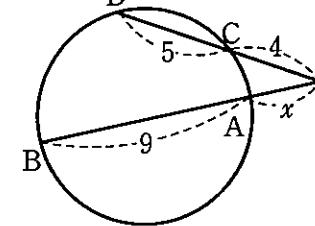
(1)



$$6x = 12$$

$$x = 2$$

(2)



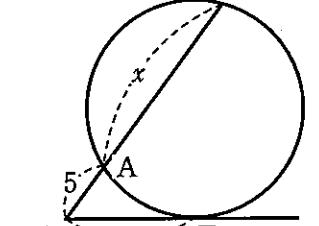
$$x(x+9) = 4 \cdot 9$$

$$x^2 + 9x - 36 = 0$$

$$(x+12)(x-3) = 0$$

$$x = 3$$

(3)



$$5(x+5) = 10^2$$

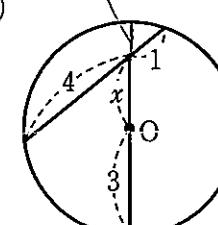
$$5x = 100 - 25$$

$$5x = 75$$

$$x = 15$$

- 16 下の図において、 x を求めよ。ただし、O は円の中心、直線 PT は円の接線で、T は接点である。

(1)



$$(3-x)(3+x) = 4 - 1$$

$$9 - x^2 = 4$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5}$$

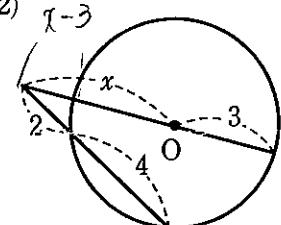
$$(x-3)(x+3) = 2 \cdot 6$$

$$x^2 - 9 = 12$$

$$x^2 = 21$$

$$x = \sqrt{21}$$

(2)



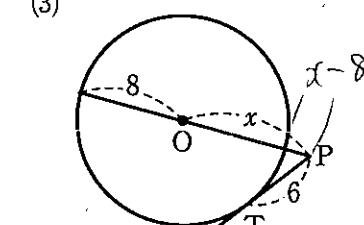
$$(x-8)(x+8) = 6^2$$

$$x^2 - 64 = 36$$

$$x^2 = 100$$

$$x = 10$$

(3)



【共通接線】

- 17 次の図において、直線 ℓ は 2 つの円 O, O' の共通接線で、A, B は接点である。円 O, O' の半径を、それぞれ 4, 3 とし、O, O' 間の距離を 5 とするとき、線分 AB の長さを求めよ。

右図のように点 H をとる。

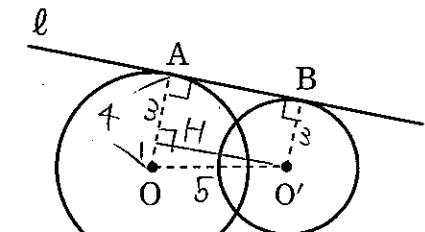
$$OH^2 = 5^2 - 4^2$$

$$= 25 - 16$$

$$= 9$$

$$OH > 0 \quad OH = 3$$

$$\therefore AB = 2\sqrt{6}$$



- 18 次の図において、直線 ℓ は 2 つの円 O, O' の共通接線で、A, B は接点である。円 O の半径を 5, 円 O' の半径を 2 とし、O, O' 間の距離を 9 とするとき、線分 AB の長さを求めよ。

右図のように点 H をとる。

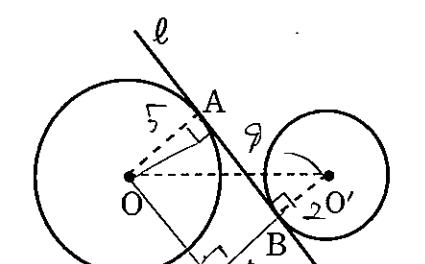
$$OH^2 = 9^2 - 5^2$$

$$= 81 - 25$$

$$= 56$$

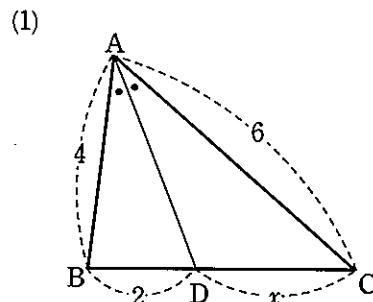
$$OH > 0 \quad OH = 2\sqrt{14}$$

$$\therefore AB = 4\sqrt{14}$$

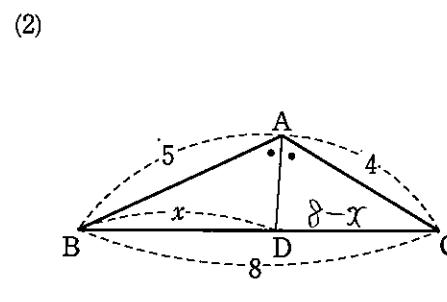


図形の性質 求値問題①

1 次の図において、 x の値を求めよ。ただし、AD は $\angle A$ の二等分線である。



$$\begin{aligned} BD : DC &= 4 : 6 \\ &= 2 : 3 \\ 2 : 3 &= 2 : x \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

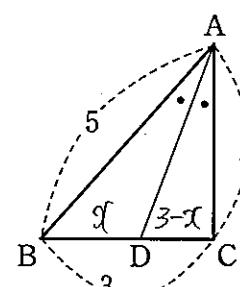


$$\begin{aligned} 5 : 4 &= x : 8 - x \\ 4x &= 40 - 5x \\ x &= \frac{40}{9} \end{aligned}$$

2 $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D とする。AB=5, BC=3, CA=4 のとき、BD の長さを求めよ。

$$BD = x \text{ とおく}$$

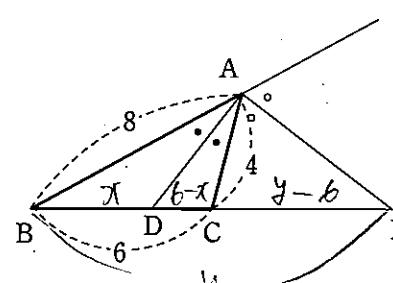
$$\begin{aligned} 5 : 4 &= x : 3 - x \\ 4x &= 15 - 5x \\ 9x &= 15 \\ x &= \frac{5}{3} \\ BD &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$



3 AB=8, BC=6, AC=4 である $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ およびその外角の二等分線と、辺 BC またはその延長との交点をそれぞれ D, E とするとき、次のものを求めよ。

(1) 線分 BD の長さ

$$\begin{aligned} BD &= x \text{ とおく} \\ 2 : 1 &= x : 6 - x \\ 12 - 2x &= x \\ 3x &= 12 \\ x &= 4 \\ BD &= 4 \end{aligned}$$



(2) 線分 BE の長さ

$$\begin{aligned} BE &= y \text{ とおく} \\ 2 : 1 &= y : 4 - 6 \\ 2y - 12 &= y \\ y &= 12 \\ BE &= 12 \end{aligned}$$

$$BD = 4$$

4 AB=9, BC=6 である $\triangle ABC$ の $\angle B$ の二等分線と辺 CA の交点を D とし、頂点 A における外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を E とする。

AD=3 であるとき、線分 DC, BE の長さを求めよ。

$$DC = x \text{ とおく}$$

$$\begin{aligned} DC : DA &= 6 : 9 \\ &= 2 : 3 \end{aligned}$$

$$2 : 3 = x : 3$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

$$DC = 2$$

$$DC = 2$$

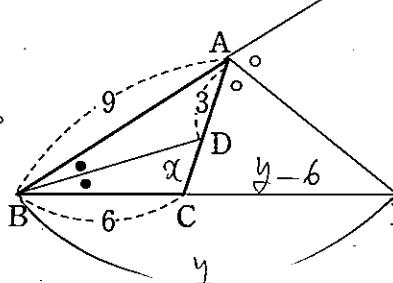
$$BE = y \text{ とおく}$$

$$9 : 5 = y : 4 - 6$$

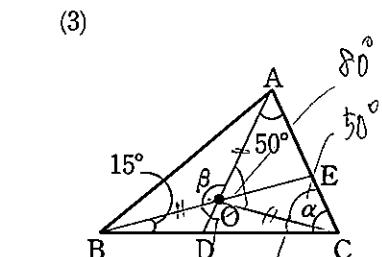
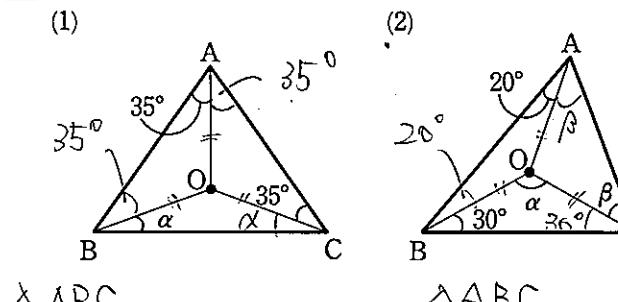
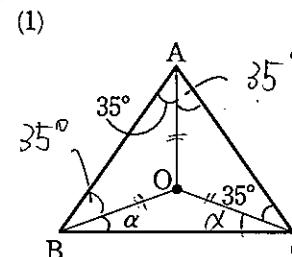
$$5y = 9y - 54$$

$$y = \frac{27}{2}$$

$$BE = \frac{27}{2}$$



5 下の図で、点 O は $\triangle ABC$ の外心である。それについて、 α, β を求めよ。



$\triangle ABC$

$$70^\circ + (\alpha + 35^\circ) + (\alpha + 35^\circ) = 180^\circ$$

$$2\alpha = 180^\circ - 140^\circ$$

$$\alpha = 20^\circ$$

$\triangle ABC$

$$(20^\circ + \beta) + 50^\circ + (30^\circ + \beta) = 180^\circ$$

$$\beta = 40^\circ$$

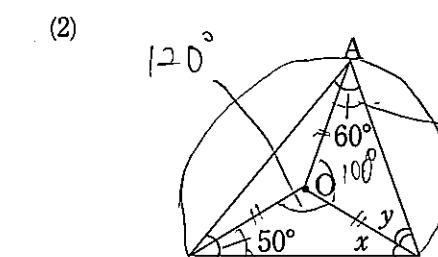
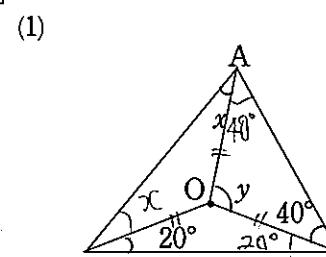
$$\alpha = 120^\circ$$

$$\alpha = 65^\circ$$

$$80^\circ + 150^\circ + \beta = 360^\circ$$

$$\beta = 130^\circ$$

6 次の図において、点 O は $\triangle ABC$ の外心である。 x, y の値を求めよ。



$\triangle ABC$

$$(x + 40^\circ) + (x + 20^\circ) + 60^\circ = 180^\circ$$

$$2x = 60^\circ$$

$$x = 30^\circ$$



$\triangle ABC$

$$x + y + 120^\circ = 180^\circ$$

$$x = 60^\circ$$

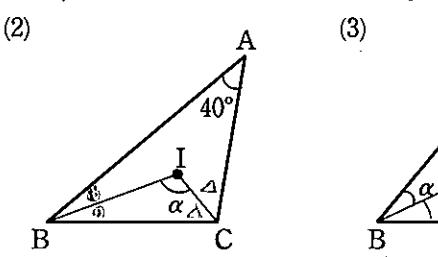
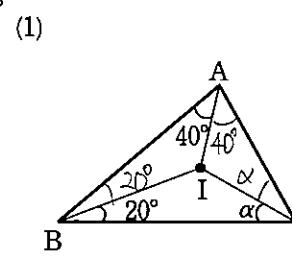
$$x = 30^\circ$$

$\triangle ABC$

$$y + y + 100^\circ = 180^\circ$$

$$y = 40^\circ$$

7 下の図で、点 I は $\triangle ABC$ の内心である。それについて、 α, β を求めよ。

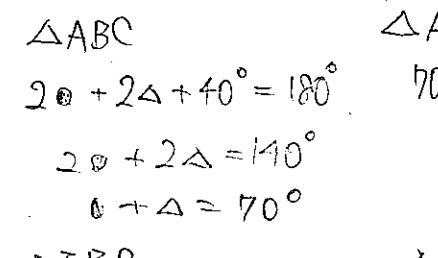


$\triangle ABC$

$$2\alpha + 40^\circ + 80^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha = 60^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

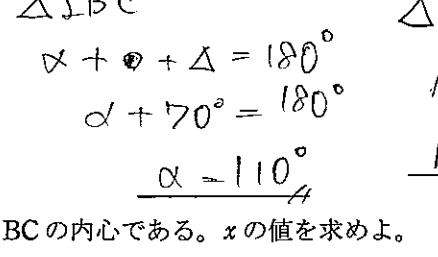


$\triangle ABC$

$$70^\circ + 2\alpha + 60^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha = 50^\circ$$

$$\alpha = 25^\circ$$



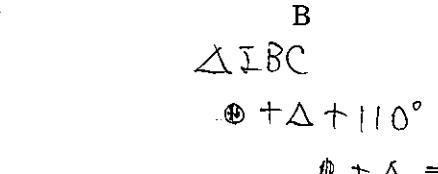
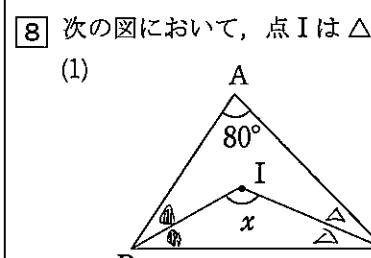
$\triangle ABC$

$$\alpha + \beta + \Delta = 180^\circ$$

$$\alpha + 70^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 110^\circ$$

$$\beta = 125^\circ$$

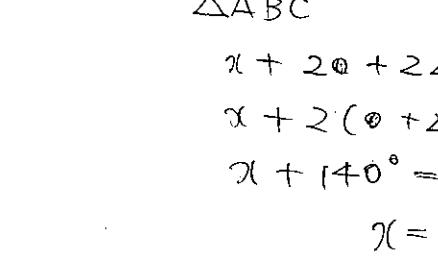


$\triangle ABC$

$$80^\circ + 2\alpha + 2\Delta = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\Delta = 100^\circ$$

$$\alpha + \Delta = 50^\circ$$



$\triangle ABC$

$$\alpha + 2\alpha + 2\Delta = 180^\circ$$

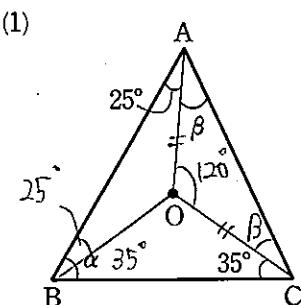
$$\alpha + 2(\alpha + \Delta) = 180^\circ$$

$$\alpha + 140^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 40^\circ$$

図形の性質 求値問題②

9 △ABCの外心をO、内心をIとする。下の図の角 α 、 β を求めよ。

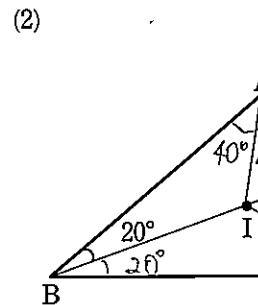


$$\underline{\alpha = 60^\circ}$$

$$120^\circ + 2\beta = 180^\circ$$

$$2\beta = 60^\circ$$

$$\underline{\beta = 30^\circ}$$



$$40^\circ + 80^\circ + 2\beta = 180^\circ$$

$$2\beta = 60^\circ$$

$$\underline{\beta = 30^\circ}$$

$$20^\circ + 2\beta + \alpha = 180^\circ$$

$$20^\circ + 60^\circ + \alpha = 180^\circ$$

$$\underline{\alpha = 100^\circ}$$

10 $AB=6$, $BC=5$, $CA=3$ である△ABCの内心をIとする。
直線AIと辺BCの交点をDとするとき、 $AI : ID$ を求めよ。

$$BD = x \quad \text{とおく}$$

$$BD : DC = 6 : 3 \\ = 2 : 1$$

$$2 : 1 = x : 5 - x$$

$$x = 10 - 2x$$

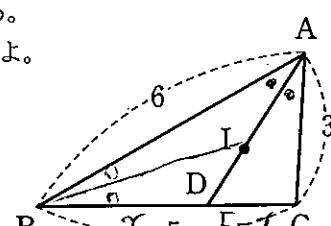
$$3x = 10$$

$$x = \frac{10}{3}$$

$$AI : ID = 6 : \frac{10}{3}$$

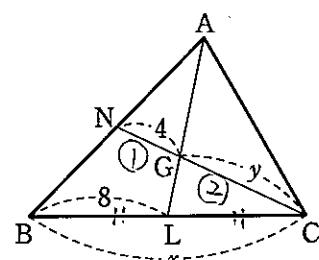
$$= 18 : 10$$

$$= 9 : 5$$



11 右の図において、点Gは△ABCの重心である。
 x , y の値を求めよ。

$$\underline{x = 16, y = 8}$$



12 $\angle A = 90^\circ$, $AB = 4$, $AC = 3$ である直角三角形ABCについて、
その重心をGとするとき、△GBCの面積を求めよ。

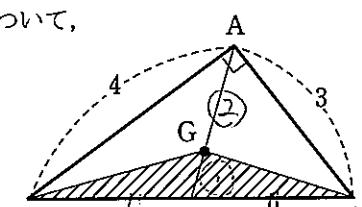
$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$$

$$\triangle ABC : \triangle GBC = 3 : 1$$

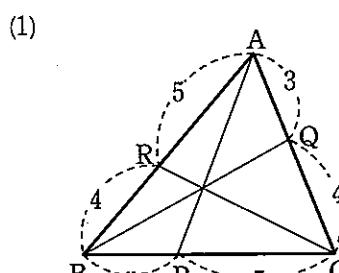
$$3 \triangle GBC = \triangle ABC$$

$$\triangle GBC = \frac{1}{3} \triangle ABC$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 6 = \underline{2}$$

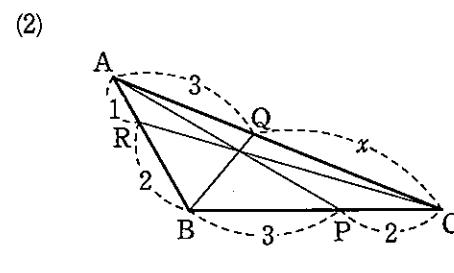


13 下の図において、 x を求めよ。



$$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = 1 \quad (\text{ナビ})$$

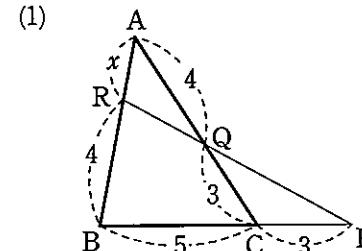
$$\underline{x = 3}$$



$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad (\text{ナビ})$$

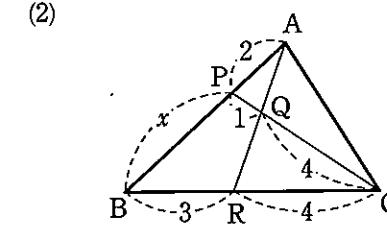
$$\underline{x = 1}$$

14 下の図において、 x を求めよ。



$$\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = 1 \quad (\text{メネラウス})$$

$$\underline{x = 2}$$



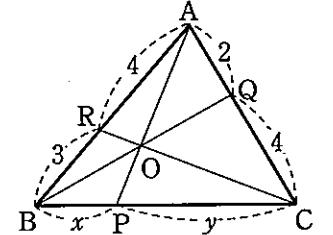
$$\frac{x+2}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1 \quad (\text{メネラウス})$$

$$x+2 = 6$$

$$\underline{x = 4}$$

15 次の図において、 $x : y$ を求めよ。

(1) (2) (3)



$$\frac{2}{4} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{3} = 1 \quad (\text{ナビ})$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{8}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6} = 1 \quad (\text{メネラウス})$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

$$x : y = 3 : 8$$

$$x : y = 1 : 3$$

$$x : y = 2 : 1$$

16 △ABCにおいて、辺BCを3:1に外分する点をP、辺ABを1:2に内分する点をRとし、PRとACの交点をQとする。このとき、次の比を求めよ。

(1) $CQ : QA$

$$\frac{3}{1} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad (\text{メネラウス})$$

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{2}{3}$$

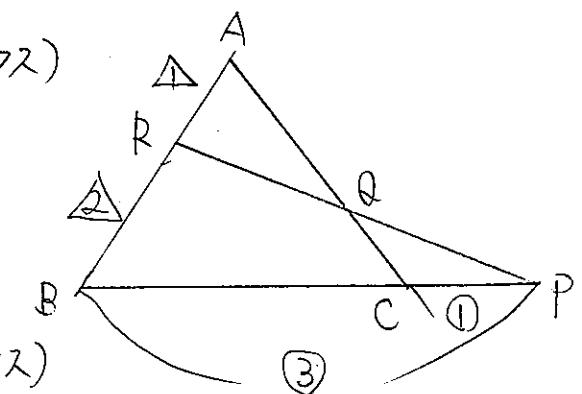
$$CQ : QA = 2 : 3$$

(2) $PQ : QR$

$$\frac{3}{1} \cdot \frac{PQ}{QR} \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad (\text{メネラウス})$$

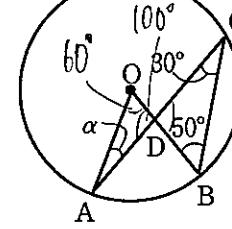
$$\frac{PQ}{QR} = \frac{2}{3}$$

$$PQ : QR = 3 : 2$$

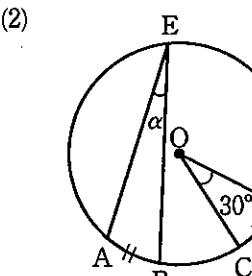


17 下の図において、 α , β を求めよ。ただし、Oは円の中心とする。

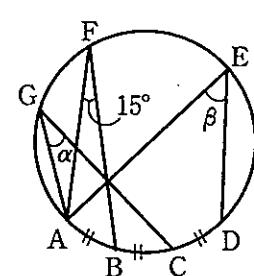
(1) (2) (3)



$$\underline{\alpha = 20^\circ}$$



$$\underline{\alpha = 15^\circ}$$

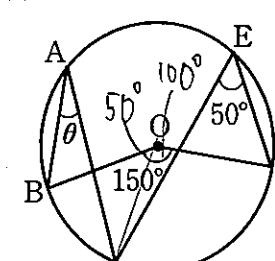


$$\underline{\alpha = 30^\circ}$$

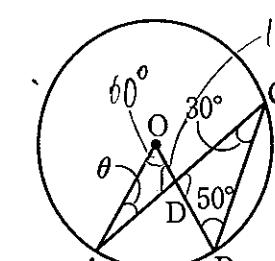
$$\underline{\beta = 45^\circ}$$

18 下の図において、角 θ を求めよ。ただし、Oは円の中心である。

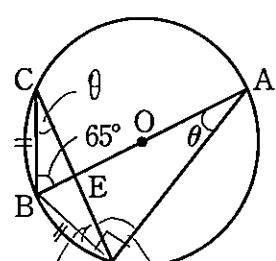
(1) (2) (3)



$$\underline{\theta = 25^\circ}$$



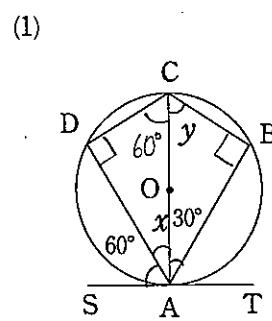
$$\underline{\theta = 20^\circ}$$



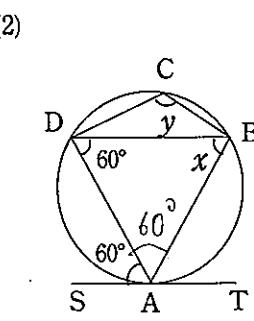
$$\underline{\theta = 25^\circ}$$

図形の性質 求値問題④

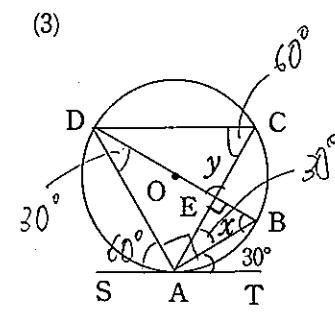
31 下の図において、点Oは円の中心で、直線ATは点Aで円に接している。x, yの値を求めよ。(3)ではDC//ATとする。



$$x = 30^\circ, y = 60^\circ$$



$$x = 60^\circ, y = 120^\circ$$

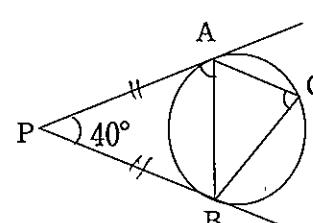


$$x = 60^\circ, y = 90^\circ$$

32 右の図において、PA, PBは円の接線である。
 $\angle APB = 40^\circ$ のとき、次の角の大きさを求めよ。

$$(1) \angle PAB = 70^\circ$$

$$(2) \angle ACB = 70^\circ$$

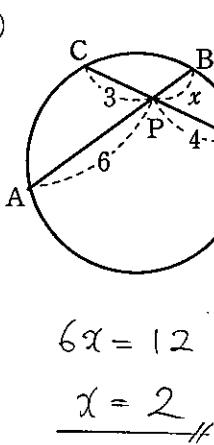


33 下の図において、xを求める。ただし、直線PTは円の接線で、Tは接点である。

$$(1) 6x = 12$$

$$(2) 6(x+9) = 4 \cdot 9$$

$$(3) 5 \cdot (x+5) = 10^2$$



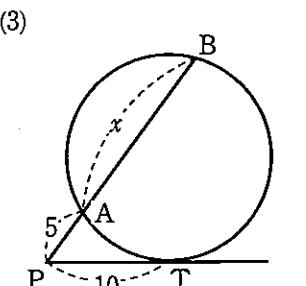
$$x = 2$$

$$x^2 + 9x = 36$$

$$x^2 + 9x - 36 = 0$$

$$(x+12)(x-3) = 0$$

$$x = 3$$

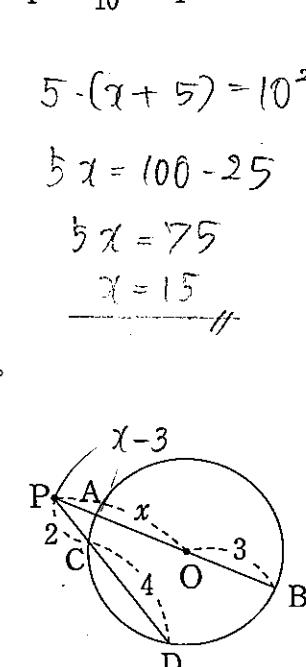


$$x = 2$$

$$5x = 100 - 25$$

$$5x = 75$$

$$x = 15$$



34 下の図において、xの値を求めよ。点Oは円の中心である。

$$(1) 3 \cdot (x-3) = 2 \cdot 6$$

$$(2) (3-x) \cdot (3+x) = 1 \cdot 4$$

$$(3) (x-3)(x+3) = 2 \cdot 6$$

$$3x - 9 = 12$$

$$9 - x^2 = 4$$

$$x^2 - 9 = 12$$

$$x = 7$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{21}$$

$$x = \sqrt{21}$$