【3次式の展開[1]】

1 次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)^3 = x^3+3x^2\cdot 2+3x\cdot 4+8$

$= x^3+6x^2+12x+8$

(2) $(3a+b)^3 = 27a^3+3\cdot(3a)^2\cdot b+3\cdot(3a)\cdot b^2+b^3$

$= 27a^3+27a^2b+9ab^2+b^3$

$(x+(-2y))^3$

(3) $(x-2y)^3 = x^3+3x^2(-2y)+3x(-2y)^2+(-2y)^3$

$= x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

【3次式の展開[2]】

2 次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)(x^2-2x+4) = x^3+8$

x^2+4x+4

(2) $(2x-a)(4x^2+2ax+a^2) = (2x)^3-a^3$

$4x^2-4a+a^2$

$= 8x^3-a^3$

【3次式の因数分解】

3 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3+64 = (x+4)(x^2-4x+16)$

$x^2+8x+16$

(2) $125x^3-y^3 = (5x-y)(25x^2+5xy+y^2)$

$25x^2-10xy+y^2$

【3次式の因数分解】

4 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^6-1 = (x^3)^2-1^2$

x^2-2x+1

x^2+2x+1

$= (x^3-1)(x^3+1)$

$= (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

(2) $a^6-64b^6 = (a^3)^2-(8b^3)^2$

$a^2-4ab+4b^2$

$= (a^3-8b^3)(a^3+8b^3)$

$a^2+4ab+4b^2$

$= (a-2b)(a^2+2ab+4b^2)(a+2b)(a^2-2ab-4b^2)$

【二項定理[1]】

5 次の展開式を，二項定理を使って求めよ。

(1) $(x+1)^4$

$= {}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3+{}_4C_2x^2+{}_4C_3x+{}_4C_4 1$

$= x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

(2) $(x-2)^6$

$= {}_6C_0x^6-{}_6C_1x^5(-2)+{}_6C_2x^4(-2)^2+{}_6C_3x^3(-2)^3$

$+{}_6C_4x^2(-2)^4+{}_6C_5x(-2)^5+{}_6C_6(-2)^6$

$= x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64$

【二項定理[2]】

6 次の展開式において，［ ］内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(2x+3)^4$ ［x^3］

${}_4C_1(2x)^3 3 = 96x$

よって 96

(2) $(x-2y)^5$ ［x^2y^3］

${}_5C_2\, x^2(-2y)^3 = -80x^2y^3$

よって -80

【$(a+b+c)^n$ の展開】

7 $(a+b-2c)^7$ の展開式における $a^2b^2c^3$ の項の係数を求めよ。

$\dfrac{7!}{2!2!3!}a^2b^2(-2c)^3 = \dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot(-8)}{2\cdot2\cdot3\cdot2}a^2b^2c^3$

$= -1680$

【整式の除法】

8 次の整式 A，B について，A を B で割った商と余りを求めよ。

(1) $A=2x^3+5x^2-2x+4$，$B=x^2-x+2$

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x+7 \\
x^2-x+2 \,\big) & 2x^3+5x^2-2x+4 \\
 & 2x^3-2x^2+4x \\
 & 7x^2-6x+4 \\
 & 7x^2-7x+14 \\
 & x-10
\end{array}
$$

商 $2x+7$

余り $x-10$

(2) $A=x^3-7x+6$，$B=x^2-3+2x$

$$
\begin{array}{rl}
 & x-2 \\
x^2+2x-3 \,\big) & x^3 \qquad -7x+6 \\
 & x^3+2x^2-3x \\
 & -2x^2-4x+6 \\
 & -2x^2-4x+6 \\
 & 0
\end{array}
$$

商 $x-2$

余り 0

【文字を含む整式の除法】

9 $A=6x^2-11ax-10a^2$，$B=3x+2a$ を，x についての整式とみて，A を B で割った商と余りを求めよ。

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x-5a \\
3x+2a \,\big) & 6x^2-11ax-10a^2 \\
 & 6x^2+4ax \\
 & -15ax-10a^2 \\
 & -15ax-10a^2 \\
 & 0
\end{array}
$$

商 $2x-5a$

余り 0

【整式の商と余り】

$\boxed{10}$ 整式 x^3+4x^2+4x-2 を整式 B で割ると，商が $x+3$，余りが $2x+1$ であるという。B を求めよ。

$$x^3+4x^2+4x-2 = B(x-3)+2x+1$$
$$B(x+3)+2x+1 = x^3+4x^2+4x-2$$
$$B(x+3) = x^3+4x^2+2x-3$$

$$\begin{array}{r} x^2+x-1 \\ x+3\,\overline{)\,x^3+4x^2+2x-3} \\ \underline{x^3+3x^2} \\ x^2+2x \\ \underline{x^2+3x} \\ -x-3 \\ \underline{-x-3} \\ 0 \end{array}$$

$$B = x^2+x-1$$

【分数式の約分】

$\boxed{11}$ 次の分数式を約分して，既約分数式で表せ。

(1) $\dfrac{15ab^4}{6a^3b^2} = \dfrac{5b^2}{2a^2}$

(2) $\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-7x+3} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{(2x-1)(x-3)}$

$$= \frac{x+1}{2x-1}$$

【分数式の積･商】

$\boxed{12}$ 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{2x}{2x+1}\times\dfrac{2x^2-3x-2}{x-2} = \dfrac{2x}{2x+1}\times\dfrac{(2x+1)(x-2)}{x-2}$

$$= 2x$$

(2) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}\div\dfrac{x^2-3x}{x^2-9} = \dfrac{x-2}{x(x+3)}\times\dfrac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}$

$$= \frac{x-2}{x^2}$$

【分数式の和･差[1]】

$\boxed{13}$ 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{2x}{x+3}+\dfrac{x+9}{x+3}$

$$= \frac{3x+9}{x+3}$$
$$= \frac{3(x+3)}{x+3}$$
$$= 3$$

(2) $\dfrac{3x+1}{x-2}-\dfrac{2x-3}{x-2}$

$$= \frac{3x+1-(2x-3)}{x-2}$$
$$= \frac{x+4}{x-2}$$

(3) $\dfrac{2x^2}{x-1}-\dfrac{x+1}{x-1}$

$$= \frac{2x^2-(x+1)}{x-1} \qquad = \frac{(2x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$= \frac{2x^2-x-1}{x-1} \qquad = 2x+1$$

【分数式の和･差[2]】

$\boxed{14}$ 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-2} = \dfrac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)}+\dfrac{3(x+1)}{(x+1)(x-2)}$

$$= \frac{2x-4+3x+3}{(x+1)(x-2)}$$
$$= \frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$$

(2) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{3x-1}{x^2-2x-3} = \dfrac{x}{x+1}+\dfrac{3x-1}{(x-3)(x+1)}$

$$= \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+1)}+\frac{3x-1}{(x-3)(x+1)}$$
$$= \frac{x^2-1}{(x-3)(x+1)}$$
$$= \frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x-1}{x-3}$$

(3) $\dfrac{3x+5}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+x} = \dfrac{3x+5}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{1}{x(x+1)}$

$$= \frac{x(3x+5)}{x(x+1)(x-1)}-\frac{x-1}{x(x+1)(x-1)}$$
$$= \frac{3x^2+5x-(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$$
$$= \frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-1)}$$
$$= \frac{(3x+1)(x+1)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{3x+1}{x(x-1)}$$

繁分数式】

次の式を簡単にせよ。

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}} = \frac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}} = \frac{1}{\dfrac{x-1-x}{x-1}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{-1}{x-1}} = \frac{x-1}{-1} = 1-x$$

【恒等式の係数決定】

16 等式 $2x^2-7x+8=(x-3)(ax+b)+c$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

$$2x^2-7x+8 = ax^2-3ax+bx-3b+c$$
$$= ax^2+(b-3a)x-3b+c$$

$$\begin{cases} 2=a & \text{—①} \\ -7=b-3a & \text{—②} \\ 8=-3b+c & \text{—③} \end{cases}$$

①を②に代入

$b=-1$

③に代入

$c=5$

よって

$a=2,\ b=-1,\ c=5$

【分数式の恒等式】

17 等式 $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を求めよ。

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$$

両辺 $\times\ x(x+1)$

$1=(x+1)a+bx$

$ax+a+bx-1=0$

$(a+b)x+(a-1)=0$

$$\begin{cases} a+b=0 & \text{—①} \\ a-1=0 & \text{—②} \end{cases}$$

①②より

$a=1,\ b=-1$

【等式の証明】

18 次の等式を証明せよ。

(1) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

(右辺) $= a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2-b^3+3a^2b-3ab^2$

$= a^3-b^3$

$=$ (左辺)

よって　(左辺) $=$ (右辺)

(2) $(a^2+1)(b^2+1)=(ab+1)^2+(a-b)^2$

(左辺) $= a^2b^2+a^2+b^2+1$

(右辺) $= a^2b^2+2ab+1+a^2-2ab+b^2$

$= a^2b^2+a^2+b^2+1$

よって　(左辺) $=$ (右辺)

【条件付きの等式の証明】

19 次の等式が成り立つことを示せ。

(1) $a+b+c=0$ のとき，$a^2+ca=b^2+bc$

$c=-a-b$ より

(左辺) $= a^2+a(-a-b)$

$= a^2-a^2-ab$

$= -ab$

(右辺) $= b^2+b(-a-b)$

$= b^2-ab-b^2$

$= -ab$

よって　(左辺) $=$ (右辺)

(2) $a+b+c=0$ のとき，$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=0$

$a+b=-c$

$b+c=-a$

$c+a=-b$ より

(左辺) $= ab(-c)+bc(-a)+ca(-b)+3abc$

$= 0$

$=$ (右辺)

よって　(左辺) $=$ (右辺)

【比例式】

20 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。

(1) $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{2a-3c}{2b-3d}$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと

$a=bk$

$c=dk$

(左辺) $= \dfrac{bk+dk}{b+d}$

$= \dfrac{k(b+d)}{b+d}$

$= k$

(右辺) $= \dfrac{2bk-3dk}{2b-3d}$

$= \dfrac{k(2b-3d)}{2b-3d}$

$= k$

よって　(左辺) $=$ (右辺)

(2) $\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$

(左辺) $= \dfrac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2+d^2}$

$= \dfrac{k^2(b^2+d^2)}{b^2+d^2}$

$= k^2$

(右辺) $= \dfrac{b^2k^2}{b^2}$

$= k^2$

よって　(左辺) $=$ (右辺)

【条件付きの不等式の証明】

$\boxed{21}$ 次の不等式を証明せよ。

(1) $x>y$ のとき，$3x-4y>x-2y$

$x-y>0$ ─ ①

$(左辺)-(右辺)=(3x-4y)-(x-2y)$

$=2x-2y$

$=2(x-y)>0$ (①より)

よって (左辺) > (右辺)

(2) $x>2$，$y>3$ のとき，$xy+6>3x+2y$

$x-2>0$，$y-3>0$ ─ ①

$(左辺)-(右辺)=(xy+6)-(3x+2y)$

$=xy-3x-2y+6$

$=x(y-3)-2(y-3)$

$=(y-3)(x-2)>0$ (①より)

よって (左辺) > (右辺)

【不等式の証明】

$\boxed{22}$ 次の不等式を証明せよ。また，(1)，(3) は等号が成り立つときを調べよ。

(1) $(a+b)^2\geqq 4ab$

$(左辺)-(右辺)=(a+b)^2-4ab$

$=a^2+2ab+b^2-4ab$

$=a^2-2ab+b^2$

$=(a-b)^2\geqq 0$

よって (左辺) ≧ (右辺)

等号成立は $a-b=0$

$a=b$ のとき

(2) $x^2+y^2\geqq 2(x+y-1)$

$(左辺)-(右辺)=x^2+y^2-2(x+y-1)$

$=x^2+y^2-2x-2y+2$

$=x^2-2x+1+y^2-2y+1$

$=(x-1)^2+(y-1)^2\geqq 0$

よって (左辺) ≧ (右辺)

等号成立は $x-1=0$ かつ $y-1=0$

$x=1$ かつ $y=1$ のとき

(3) $a^2+b^2\geqq ab$

$(左辺)-(右辺)=a^2+b^2-ab$

$=a^2-ba+b^2$

$=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2-\frac{1}{4}b^2+b^2$

$=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geqq 0$

よって (左辺) ≧ (右辺)

等号成立は $a-\frac{1}{2}b=0$ かつ $b=0$

$a=0$ かつ $b=0$ のとき

【$\sqrt{\ }$ を含む不等式の証明】

$\boxed{23}$ $x>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$1+x>\sqrt{1+2x}$

(左辺) > 0，(右辺) > 0 より

$(左辺)^2-(右辺)^2=(1+x)^2-(1+2x)$

$=x^2+2x+1-1-2x$

$=x^2>0$

よって (左辺) > (右辺)

【絶対値を含む不等式の証明】

$\boxed{24}$ 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

$|a|+|b|\geqq|a+b|$

(左辺) > 0，(右辺) > 0 より

$(左辺)^2-(右辺)^2=(|a|+|b|)^2-(a+b)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(|ab|-ab)\geqq 0$

よって (左辺) ≧ (右辺)

等号成立は $|ab|=ab$ $ab\geqq 0$ のとき

【相加平均と相乗平均】

$\boxed{25}$ $a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

(1) $a+\frac{4}{a}\geqq 4$

$a>0$，$\frac{4}{a}>0$

相加・相乗平均より

$(左辺)=a+\frac{4}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}$

$=2\sqrt{4}$

$=4$

$=(右辺)$

等号成立は

$a=\frac{4}{a}$

$a^2=4$

$a=2$ のとき

$\cancel{a=-2}$

(2) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2$

$\frac{a}{b}>0$，$\frac{b}{a}>0$

相加・相乗平均より

$(左辺)=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}$

$=2$

$=(右辺)$

等号成立は

$\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$

$a^2=b^2$

$a^2-b^2=0$

$(a+b)(a-b)=0$

$a=b$ のとき

$\cancel{a=-b}$

(3) $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)\geqq 16$

$(左辺)=ab+\frac{9}{ab}+10$

$ab>0$，$\frac{9}{ab}>0$

相加・相乗平均より

$\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{9}{ab}}+10$

$=2\sqrt{9}+10$

$=16$

$=(右辺)$

等号成立は

$ab=\frac{9}{ab}$

$(ab)^2=9$

$ab=3$ のとき

$\cancel{ab=-3}$