

集合と命題①

【集合の表し方】

① 次の集合を、要素を書き並べて表せ。

(1) 15以下の正の奇数全体の集合

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$

(2) 36の正の約数全体の集合

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

(3) $\{x \mid x \text{は整数}, -3 < x < 4\}$

$$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

(4) $\{3n-2 \mid n \text{は} 1 \text{以上} 5 \text{以下の整数}\}$

$$\{1, 4, 7, 10, 13\}$$

【部分集合】

② 次の2つの集合の関係を、 \subset , \supset , $=$ を使って表せ。

(1) $A = \{2n \mid n \text{は整数で}, 1 \leq n \leq 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$

$$A = \{2, 4, 6, 8\} \quad \therefore A = B$$

(2) $C = \{2n+1 \mid n \text{は} 5 \text{以下の自然数}\}$, $D = \{4n-1 \mid n=1, 2, 3\}$

$$C = \{3, 5, 7, 9, 11\} \quad D = \{3, 7, 11\} \\ \therefore C \supset D$$

(3) $P = \{x \mid -1 \leq x \leq 3, x \text{は実数}\}$, $Q = \{x \mid x < 4, x \text{は実数}\}$



③ 次の集合の部分集合をすべてあげよ。

(1) $\{1, 2\}$

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$$

(2) $\{a, b, c\}$

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$$

【共通部分と和集合】

④ 次の2つの集合 A, B について、 $A \cap B$ と $A \cup B$ を求めよ。

(1) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$$

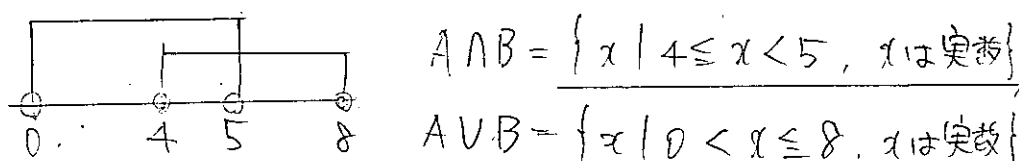
(2) $A = \{x \mid x \text{は整数}, -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{2n-1 \mid n=0, 1, 2\}$

$$A = \{-2, 0, 2, 3\}, \quad B = \{-1, 1, 3\}$$

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

$$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

(3) $A = \{x \mid 4 \leq x \leq 8, x \text{は実数}\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 5, x \text{は実数}\}$



【補集合】

⑤ 全体集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ の部分集合 A, B

を $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ とする。次の集合を求めよ。

(1) $A \cap B$

$$= \{3, 5\}$$

(2) \bar{A}

$$= \{6, 7, 8, 9\}$$

(3) \bar{B}

$$= \{2, 4, 6, 8\}$$

(4) $\bar{A} \cap B$

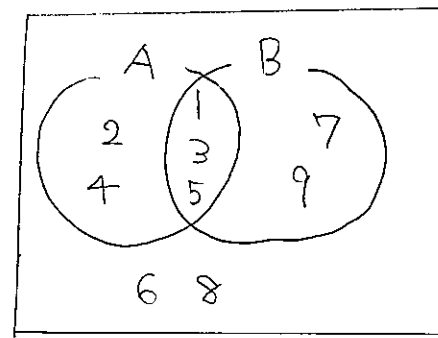
$$= \{7, 9\}$$

(5) $\overline{A \cap B}$

$$= A \cup B \\ = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

(6) $\overline{A \cup B}$

$$= \bar{A} \cap \bar{B} \\ = \{6, 8\}$$



【補集合】

⑥ 全体集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ の部分集合 A, B について、

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 4, 8\}, \quad \bar{A} \cap B = \{6, 9\}, \quad A \cap \bar{B} = \{2, 5, 7\}$$

であるとき、次の集合を求めよ。

(1) $A \cup B$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} = \{1, 4, 8\}$$

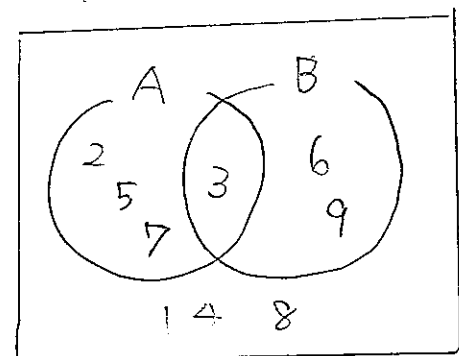
$$= \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$$

(2) A

$$= \{2, 3, 5, 7\}$$

(3) B

$$= \{3, 6, 9\}$$



【真偽】

7 次の命題の真偽を調べ、偽のときは反例を1つ示せ。ただし、 a, b, c は実数、 m, n は自然数とする。

(1) $a=0 \implies ab=0$

真偽 真	反例
---------	----

(2) m, n がともに素数 $\implies m+n$ は偶数

真偽 偽	反例 $m=2, n=3$
---------	------------------

(3) $ac=bc \implies a=b$

真偽 偽	反例 $a=1, b=2, c=0$
---------	-----------------------

(4) $|a|=|b| \implies a=b$

真偽 偽	反例 $a=1, b=-1$
---------	-------------------

(5) $a=2 \implies a^2-5a+6=0$

真偽 真	反例
---------	----

(6) $a^2=3a \implies a=3$

真偽 偽	反例 $a=0$
---------	-------------

8 次の条件 p, q について、命題 $p \implies q$ の真偽を集合を用いて調べよ。ただし、 x は実数、 n は自然数とする。

(1) $p: x < -3, q: 2x+4 \leq 0$

$2x+4 \leq 0$
 $2x \leq -4$
 $x \leq -2$

(2) $p: n$ は12の正の約数, $q: n$ は24の正の約数

12の約数 = $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
 24の約数 = $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

(3) $p: 2x-4 < 0, q: -1 < x < 1$

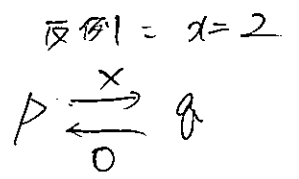
$2x-4 < 0$
 $2x < 4$
 $x < 2$

【必要十分条件】

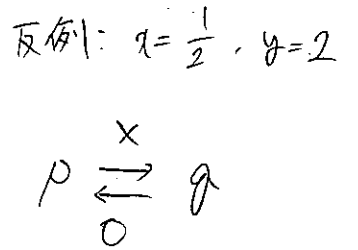
9 次の \square に適するものを下の①~③から選べ。ただし、 x, y は実数とする。

(1) $\frac{x^2-6x+8=0}{p}$ は $\frac{x=4}{q}$ であるための \square 。

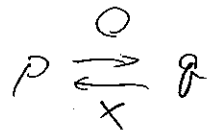
$(x-4)(x-2)=0$
 $x=2, 4$



(2) $\frac{xy=1}{p}$ は $\frac{x=1 \text{ かつ } y=1}{q}$ であるための \square 。

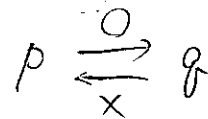


(3) $\frac{x>0 \text{ かつ } y>0}{p}$ は $\frac{xy>0}{q}$ であるための \square 。

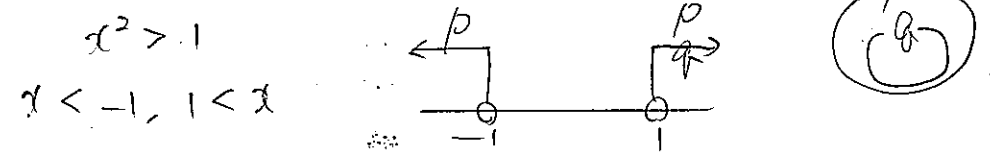


反例: $x=-2, y=-2$

(4) $\frac{\triangle ABC \text{ が正三角形であること}}{p}$ は $\frac{\triangle ABC \text{ が二等辺三角形であること}}{q}$ であるための \square 。



(5) $\frac{x^2>1}{p}$ は $\frac{x>1}{q}$ であるための \square 。



(6) $|x|=|y|$ は $x^2=y^2$ であるための \square 。

- ① 必要十分条件である
- ② 必要条件であるが、十分条件ではない
- ③ 十分条件であるが、必要条件ではない

【否定】

10 次の条件の否定を述べよ。ただし、 x, y は実数、 m, n は整数とする。

(1) x は無理数である。

否定 x は有理数である

(2) $x \neq 0$ または $y=0$

否定 $x=0$ かつ $y \neq 0$

(3) $x \leq 0$ または $y > 0$

否定 $x > 0$ かつ $y \leq 0$

集合と命題③

(4) $-2 \leq x < 1$

否定 $x < -2$ かつ $1 \leq x$

(5) m, n はともに偶数である。

否定 m, n の少なくとも一方は奇数

【逆・裏・対偶】

11 次の命題の逆・裏・対偶を述べ、それらの真偽を調べよ。ただし、 x, y は実数、 n は整数とする。

(1) $x^2 \neq -x \implies x \neq -1$

逆 $x \neq -1 \implies x^2 \neq -x$ 真偽 偽

裏 $x^2 = -x \implies x = -1$ 真偽 偽

対偶 $x = -1 \implies x^2 = -x$ 真偽 真

反例: $x = 0$

(2) n は4の倍数 $\implies n$ は8の倍数

逆 n は8の倍数 $\implies n$ は4の倍数 真偽 真

裏 n は4の倍数でない $\implies n$ は8の倍数でない 真偽 真

対偶 n は8の倍数でない $\implies n$ は4の倍数でない 真偽 偽

$x = \sqrt{2}, y = 0$

(3) $x+y$ は有理数 $\implies x$ または y は有理数

逆 x または y は有理数 $\implies x+y$ は有理数 真偽 偽

裏 $x+y$ は無理数 $\implies x, y$ はともに無理数 真偽 偽

対偶 x, y はともに無理数 $\implies x+y$ は無理数 真偽 偽

反例: $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$

【対偶を利用した証明】

12 対偶を利用して、次の命題を証明せよ。 m, n は整数とする。

(1) $n^2 + 4n + 1$ が4の倍数ならば、 n は奇数である。

対偶 n が偶数ならば、 $n^2 + 4n + 1$ は4の倍数でない

証明 対偶が真であることを示す。
 n は偶数 \implies
 $n = 2k$ (k : 整数) とおく
 $n^2 + 4n + 1 = (2k)^2 + 4(2k) + 1$
 $= 4k^2 + 8k + 1$
 $= 4(k^2 + 2k) + 1$
 $(k^2 + 2k$: 整数)
 \therefore 示された。

(2) mn が偶数ならば、 m, n のうち少なくとも1つは偶数である。

対偶 m, n がともに奇数ならば、 mn は奇数である。

証明 対偶が真であることを示す。
 m, n は奇数 \implies
 $m = 2k + 1$
 $n = 2l + 1$ (k, l : 整数) とおく
 $mn = (2k + 1)(2l + 1)$
 $= 4kl + 2k + 2l + 1$
 $= 2(2kl + k + l) + 1$
 $(2kl + k + l$: 整数)
 \therefore 示された。

【背理法を利用した証明】

13 $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて、次の命題を証明せよ。

$1 + 2\sqrt{3}$ は無理数である。

証明 $1 + 2\sqrt{3}$ は有理数と仮定する
 $1 + 2\sqrt{3} = r$ (r : 有理数) とおく
 $2\sqrt{3} = r - 1$
 $\sqrt{3} = \frac{r - 1}{2}$
 $\sqrt{3}$ は無理数
 $\frac{r - 1}{2}$ は有理数 なる矛盾
 \therefore $1 + 2\sqrt{3}$ は無理数である。